Université Mohamed Premier

Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Département de Physique

Filière : SMPC& SMAI

Electrostatique et Electrocinétique

Cours et Exercices avec Solutions

Pr. AHMED FAIZE

Table des matières

1. Charges électriques 6

2. Interaction électrique 7

2.1 Loi de Coulomb 7

2.2 Principe de superposition 8

3. Champ électrique 9

3.1 Charge ponctuelle 9

3.2 Système de n charges discrètes 9

4. Potentiel électrique 10

4.1 Potentiel créé par une charge q 10

4.2 Potentiel créé par un système de n charges 10

4.3 Relation entre potentiel et le champ électrique 10

5. Force et énergie potentielle électrostatiques 11

6. Circulation du champ électrique 11

7. Loi Locale et Loi Intégrale 12

7.1 Forme locale 12

7.2 Forme intégrale 12

8. **Dipôle électrostatique** 13

8.1 Champ et potentiel d'un dipôle 13

A) Définitions 13

B) Potentiel électrique du dipôle 13

C) Champ électrique du dipôle 14

D) Lignes de champ et équipotentielles 14

8.2 Action d'un champ électrique uniforme sur un dipôle 15

8.2.1 Mouvement du centre de masse 16

8.2.2 Théorème du moment cinétique 16

8.3 Développement multipolaire 17

8.3.1 Champ créé à grande distance par une distribution de charge donnée 17

8.3.2 Application 18

Chapitre 2 : 22

Flux et théorème de Gauss 22

1. Flux du champ électrostatique 22

1.1 Flux élémentaire du champ électrostatique 22

1.2 Flux du champ électrostatique à travers une surface finie 23

2. Théorème de Gauss 23
2.1 Définition 23
2.2 Exemples de calculs du champ par Théorème de Gauss 23
3. Loi Locale et Loi Intégrale 25
4. Conservation du flux 25
5. Equations de Poisson et de Laplace 26
6. Conditions de passage à travers une interface 26
Chapitre 3 : 29
Conducteurs en équilibre 29
1. Loi de conservation de la charge 29
2. Corps Conducteurs et corps isolants 29
3. Equilibre électrostatique d'un conducteur 30
3.1 Définition d'un conducteur 30
3.2 Équilibre électrostatique d'un conducteur 30
4. Influence de deux conducteurs chargés 32
4.1 Influence partielle 32
4.2 Influence totale 34
5. Capacité d'un conducteur isolé 34
6. Système de n conducteurs en équilibre 35
7. Capacité d'un condensateur 37
7.1 Définition 37
7.2 Condensateur : influence totale 38
7.3 Condensateur : convention 38
7.4 Condensateur sphérique 39
7.5 Condensateur cylindrique 40
7.6 Condensateur plan 40
8. Association de condensateurs 41
8.1 Association en série 41
8.2 Association en série 42
Chapitre 4 : 44
Energie Electrostatique 44
2. Energie potentielle d'une charge ponctuelle 44
3. Energie potentielle d'un système de charges 45
4. Energie électrostatique des conducteurs 47

4.1 Energie d'un conducteur unique 47
4.2 Energie d'un système à n conducteurs 47
4.3 Energie d'un condensateur 48
5. Densité d'énergie électrostatique 48
Exemple d'application : énergie d'une sphère conductrice chargée 49
Chapitre 5 : 51
Lois Fondamentales d'Electrocinétique 51
1. Matériaux en électricité 51
2. Courant électrique 51
2.1 Notion de courant 51
2.2 Vecteur densité de courant 52
3. Conductivité électrique : Loi d'ohm locale 52
4. Résistance électrique : Loi d'ohm Macroscopique 53
5. Association de résistances 54
5.1 Résistances en série 54
5.2 Résistances en parallèle 54
6. Energie et puissance d'un générateur 54
6.1 Définition 54
6.2 Loi d'Ohm d'un générateur 55
6.3 Interprétation énergétique 55
6.4 Caractéristique du générateur 55
7. Energie et puissance d'un récepteur 56
8. Lois de Kirchhoff 57
8.1 Première loi de Kirchhoff : la loi des nœuds 57
8.2 Deuxième loi de Kirchhoff : les lois des branches et des mailles 57
8.3 Méthode d'utilisation des lois de Kirchhoff 57
9. Théorème de Thévenin 58
10. Théorème de Norton 62
Exercices avec Solutions 64

Chapitre 1 :

Champ et potentiel électrostatiques dans le vide

Chapitre 1 :

Champ et potentiel électrostatiques dans le vide

1. Charges électriques

Dans tout phénomène physique intervient un **objet** dont la structure confère certaines propriétés à l'espace qui l'entoure. Dans le cas de la gravitation, l'objet est constitué par une masse. En électrostatique, l'objet est une charge, mesurée en **Coulomb (C)** dans le système international.

Il existe deux types de charge électrique ; les charges de même nature se **repoussent** tandis que celles qui sont de nature différentes **s'attirent**. Les uns sont dites ***positives*** et sont mesurées par un nombre positif, les autres sont dites ***négatives*** et sont mesurées par un nombre négatif. Toute charge est multiple de la charge élémentaire : $e = + 1{,}62\ 10^{-19}$ C

Les atomes sont constitués de particules chargées, à savoir :

- ✓ Les électrons : (e^-) responsables de la conduction électrique dans les métaux
  - Charge : $q_e = -e = -1{,}62\ 10^{-19}$ C
  - Masse : $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg
- ✓ Les protons : (H^+)
  - Charge : $q_e = -e = -1{,}62\ 10^{-19}$ C
  - Masse : $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg

Ainsi que les ions et les porteurs de charge dans les semi-conducteurs qui peuvent être des électrons ou des trous (absence d'électrons).

On distingue :

- ➢ **Les charges ponctuelles :** les particules ou corps chargés dont les dimensions sont négligeables devant la distance d'interaction.
- ➢ **Les distributions continues de charge :** hypothèse d'une charge macroscopique permettant de définir une charge infinitésimale **dq,** à laquelle on peut appliquer les formules établies dans le cas d'une charge ponctuelle, avant d'intégrer sur la distribution.
  On définit ainsi les densités :
  - Linéique sur un fil : $\lambda = \frac{dq}{dl}$ (C/m)
  - Surfacique sur une surface : $\sigma = \frac{dq}{dS}$ (C/m^2)
  - Volumique dans un volume : $\rho = \frac{dq}{dv}$ (C/m^3)

auxquelles correspondent respectivement les charges infinitésimalesλdl, σdS et ρdv.

2. Interaction électrique

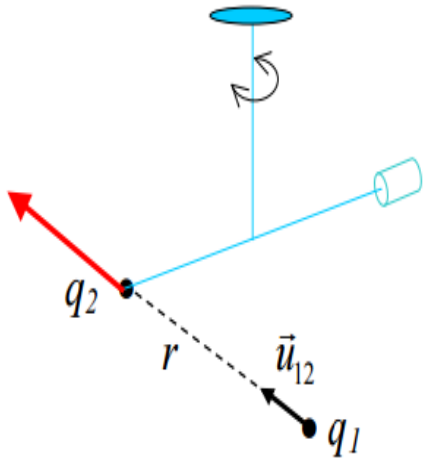
2.1 Loi de Coulomb

• L'interaction est caractérisée par une intensité et une direction → représentation vectorielle

• Coulomb, grâce à son pendule de torsion, va quantifier cette interaction

On considère :

- Deux charges q_1 et q_2
- $\overrightarrow{u_{12}}$ un vecteur unitaire dirigé de 1→ 2
- r la distance qui sépare les deux charges

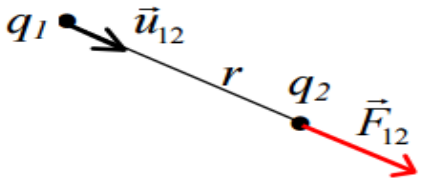


F_{12} est la force produite par q_1 et qui agit sur q_2 :

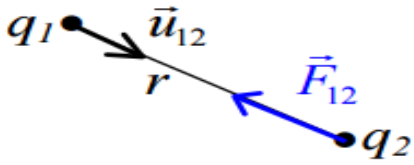
$$\boxed{\overrightarrow{F_{12}} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{u_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}}$$

Si : K > 0, r^2>0 et $\overrightarrow{u_{12}}$ constant alors le produit q_1q_2 qui donne le sens de $\overrightarrow{F_{12}}$

Si $q_1q_2 > 0$ alors $\overrightarrow{F_{12}}$ a le même sens que $\overrightarrow{u_{12}}$



Si $q_1q_2 < 0$ alors $\overrightarrow{F_{12}}$ a le sens opposé à $\overrightarrow{u_{12}}$



<u>Unités : MKSA</u>

F Newton → défini en mécanique

r en mètre → défini en mécanique

q en Coulomb → défini à partir du courant : $q = \int idt$

K = $1/4\pi\varepsilon_0 \approx 9.10$

ε_0 est la permittivité du vide où $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$

Finalement : $\boxed{\overrightarrow{F_{12}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_{12}}}$

REMARQUES

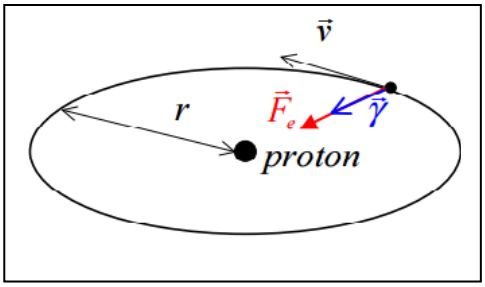
1 - La loi de Coulomb s'applique à **deux charges ponctuelles**

2 - La loi de Coulomb s'applique à deux charges ponctuelles placées dans le vide

Un milieu matériel va modifier la valeur de ε_0 .

EXEMPLE : **interaction entre un proton et un électron Modèle de Bohr (atome d'hydrogène)**

proton au repos + électron animé d'une vitesse $\vec{v}$



$$\boxed{\overrightarrow{F_e} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{N}}$$

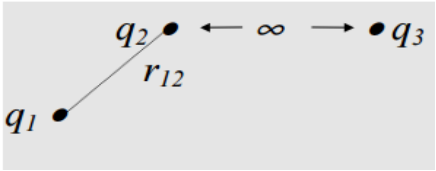
et $\vec{\gamma} = \frac{v^2}{r}\vec{N}$ or $\vec{F} = m_e\vec{\gamma}$

donc $v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r m_e}}e = 2.1\ 10^6\ m/s$

2.2 Principe de superposition

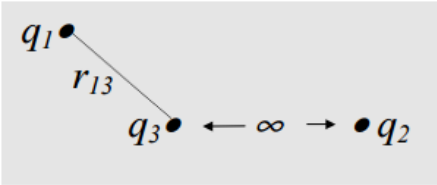
La force avec laquelle interagissent deux charges n'est pas affectée par la présence d'une troisième charge

1 ère configuration :



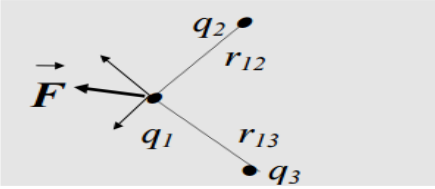
$$\overrightarrow{F_{21}} = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\overrightarrow{u_{21}}$$

2 ème configuration :



$$\overrightarrow{F_{31}} = K\frac{q_1 q_2}{r_{13}^2}\overrightarrow{u_{31}}$$

3 ème configuration :



$$\vec{F} = \overrightarrow{F_{21}} + \overrightarrow{F_{31}}$$

D'une manière plus générale :

$$\boxed{\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{i1}}$$

3. Champ électrique

3.1 Charge ponctuelle

- on considère de nouveau le système de deux charges q_1, q_2

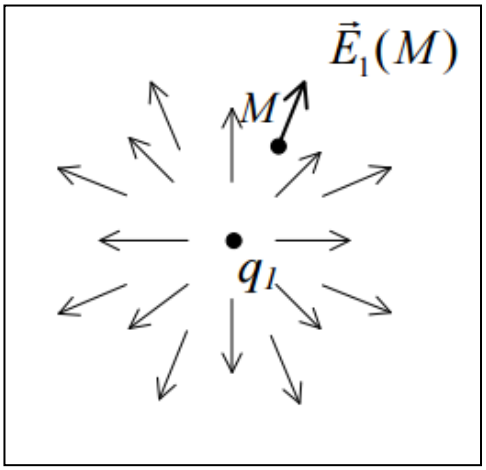
- on exprime $\overrightarrow{F_{12}}$ à l'aide d'un nouveau vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{12}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_{12}} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_{12}} = q_2 \ \overrightarrow{E_1}}$$

$\overrightarrow{E_1}$ représente le champ électrique créé par la charge q_1

$$\boxed{\overrightarrow{E_1} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_{12}}}$$

La charge q_1 perturbe son environnement et le champ $\overrightarrow{E_1}$ caractérise cette perturbation.



Si on place une charge q en un point M elle subit la force :

$$\boxed{\vec{F} = q\overrightarrow{E(M)}}$$

3.2 Système de n charges discrètes

Lorsque n charges ponctuelles existent simultanément en des points M_1, M_2, …, M_n, le principe de superposition permet d'écrire :

$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q0qi}{4\pi\epsilon_0 r_{0\,i}^2}\overrightarrow{u_{0i}} \Longrightarrow \vec{F} = q0\sum_{i=1}^{n} \frac{qi}{4\pi\epsilon_0 r_{0\,i}^2}\overrightarrow{u_{0i}} \Longrightarrow \vec{F} = q0\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{E_i} = q0\,\vec{E}}$$

→ E est le champ électrique (ou électrostatique) du système de charges q_1, q_2, …, q_n.

$$\vec{E}(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{qi}{4\pi\epsilon_0 r_{0\,i}^2} \overrightarrow{u_{0i}}$$

4. Potentiel électrique

4.1 Potentiel créé par une charge q

Le potentiel électrostatique en un point M, situé à la distance r de la charge q est défini à une constate près par :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + \text{cte}$$

4.2 Potentiel créé par un système de n charges

Le potentiel électrostatique en un point M créé par ensemble de charges q_1, q_2, q_3, …,q_n placées en des points M_1, M_2, M_3, …, M_n est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{1}^{n}\frac{qi}{ri}$$

4.3 Relation entre potentiel et le champ électrique

Champ électrique est une variation du potentiel dans l'espace

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

<u>Relation "inverse" :</u>

- **fonction potentiel**

Si dans l'espace règne un champ électrique E (x y z) la fonction potentiel en un point M(x,y,z) s'écrit :

$$V(M) = -\int \vec{E}\overrightarrow{dl}$$

Où $\overrightarrow{dl}$ est le **vecteur déplacement élémentaire**

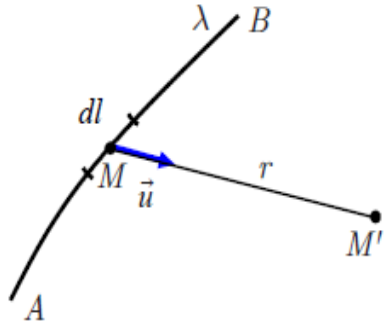
- **Différence de potentiels**

La différence de potentiels entre les points P_1 et P_2 s'écrit :

$$\Delta V(M) = -\int_{P1}^{P2} \vec{E}\overrightarrow{dl} = -(V_{P2}-V_{P1})$$

- Dans le cas de distributions continues de charges, on aura de même :

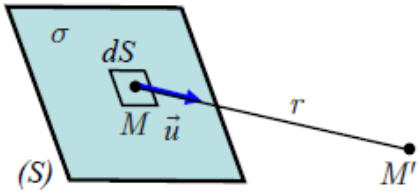
- Pour un fil chargé uniformément :



$$\vec{E} = K \int_{AB} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

$$V = K \int_{AB} \frac{\lambda dl}{r}$$

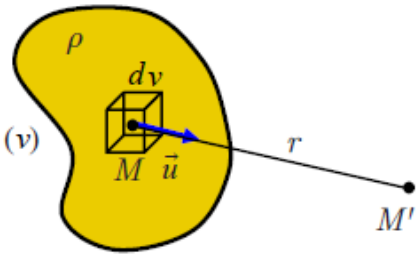
Pour une surface chargée uniformément



$$\vec{E} = K \iint_s \frac{\sigma ds}{r^2} \vec{u}$$

$$V = K \iint_s \frac{\sigma ds}{r} \vec{u}$$

Pour un volume chargé uniformément



$$\vec{E} = K \iiint_v \frac{\rho dv}{r^2} \vec{u}$$

$$V = K \iiint_v \frac{\rho dv}{r} \vec{u}$$

5. Force et énergie potentielle électrostatiques

De facon générale, la présence d'une charge q en un point M où le champ est $\vec{E}$ se traduit par une interaction caractérisée par deux propriétés :

- Une propriété vectorielle, la force exercée sur la charge q : $\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$
- Une propriété scalaire, l'énergie potentielle définie à une constante près comme le potentiel : $\boxed{Ep = qV}$
- Et une relation entre les deux propriétés : $\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}Ep}$

6. Circulation du champ électrique

La circulation, le long d'une courbe (ou contour) d'un champ vectoriel $\vec{E}$ est donnée par :

$$\boxed{\int \vec{E}\overrightarrow{dM} = -\int_C \overrightarrow{grad}V(M).\overrightarrow{dM} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B)}$$

Pour un champ de gradient, cette circulation est indépendante du chemin suivi, elle ne dépend que de la différence de potentiels entre les points de départ et d'arrivée.
Dans le cas du champ électrique, cette différence de potentiels est appelée tension électrique :

$$U_{AB} = V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\overrightarrow{dM}$$

Comme le potentiel électrique est défini `a une constante additive près, seules les différences de potentiels (indépendantes de cette constante) ont un sens physique.

Corollaire : La circulation du champ électrique sur tout contour fermé est nulle : c'est un champ conservatif.

$$\oint \vec{E}\overrightarrow{dM} = 0$$

7. Loi Locale et Loi Intégrale

7.1 Forme locale

La loi $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ permet de déterminer $\vec{E}$ en un point quelconques si V est connu en ce point (ou l'inverse). Elle présente un caractère général, libéré de toute considération de symétrie susceptible d'apparaître à l'échelle globale.

Cette loi peut s'écrire sous une autre forme, également locale : en effet, sachant que $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}V) \equiv \vec{0}$, on peur s'écrire :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}$$

On peut dire que le champ est irrotationnel.

7.2 Forme intégrale

La loi $\int_{AB} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = V_A - V_B$

Ou encore $\oint \vec{E}\overrightarrow{dM} = 0$ dans un contour fermé

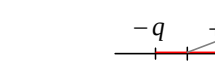
Peut permettre le calcul de $\vec{E}$ en un point, mais il faut passer par un calcul à l'échelle globale. C'est-à-dire que cette loi intégrale ne présente de l'intérêt que si l'on peur mettre en évidence des symétries permettant de faciliter le calcul. Dans de cas, la deuxième méthode peut s'avérer plus rapide que la première.

8. Dipôle électrostatique

8.1 Champ et potentiel d'un dipôle

A) Définitions

Doublet :
Système de deux charges opposées $-q$ en N, $+q$ en P ($q>0$)

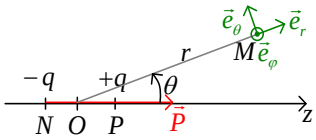


On définit le moment dipolaire électrique du doublet : $\vec{P} = q\overrightarrow{NP}$.

Un dipôle est un doublet pour lequel $a = NP <<$ distances caractéristiques.

Approximation dipolaire : on confond le doublet et le dipôle. (ainsi, la distance au doublet est $>> a$)

B) Potentiel électrique du dipôle



On note O le milieu de $[NP]$, $a = NP$

On définit l'axe $(Oz$ par la droite (NP) orientée par $\overrightarrow{NP}$.

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques r, θ, φ.

On prend comme ½ plan $\varphi = \text{cte}$ le plan de la feuille.

Potentiel créé en M :

$$V(M) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 NM} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM}$$

$$PM^2 = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})^2 = PO^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{PO} = \frac{a^2}{4} + r^2 - 2\frac{a}{2}r\cos\theta$$

Pour un dipôle, on a $r >> a$.

$$\frac{1}{PM} = (PM^2)^{-1/2} = \left(r^2\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + O(\frac{a^2}{r^2})\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta + O(\frac{a^2}{r^2})\right)$$

De même, $NM^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + 2\frac{a}{2} r\cos\theta$ et $\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta + O(\frac{a^2}{r^2})\right)$.

$$\text{Ainsi, } V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(-\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta + O(\frac{a^2}{r^2})\right) + 1 + \frac{a}{2r}\cos\theta + O(\frac{a^2}{r^2})\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{a}{r}\cos\theta + O(\frac{a^2}{r^2})\right)$$

Donc, à des termes en $1/r^3$ près :

$$\boxed{V(M) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P}\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

On l'appelle le potentiel du dipôle $\vec{P}$ en O.
On a une décroissante en $1/r^2$, caractéristique du dipôle.

C) Champ électrique du dipôle

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta - \underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi}_{=\vec{0}} = E_r(r)\vec{e}_r + E_\theta(r)\vec{e}_\theta.$$

$$V(M) = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Donc $\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_\theta = \frac{-2P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ et $\left.\frac{\partial V}{\partial \theta}\right|_r = \frac{-P\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Donc $\vec{E}(M) = \left|\begin{array}{l} \frac{2P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ \frac{1}{r}\frac{P\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ 0 \end{array}\right.$; E_r, E_θ décroissent en $1/r^3$

Avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$:

$$3(\vec{P}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{P} = 3pr\cos\theta.r.\vec{e}_r - r^2(p\cos\theta.\vec{e}_r - p\sin\theta.\vec{e}_\theta)$$

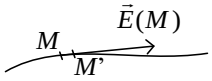
$$= 2pr^2\cos\theta.\vec{e}_r + pr^2\sin\theta.\vec{e}_\theta$$

Donc $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{3(\vec{P}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}}$; cette formule peut ainsi être utilisée dans n'importe quel système de coordonnées : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.

D) Lignes de champ et équipotentielles

1) Lignes de champ

Equation différentielle d'une ligne de champ : $d\vec{M} \wedge \vec{E}(M) = \vec{0}$.



$$\begin{vmatrix} dr \\ d\theta \\ r\sin\theta d\varphi \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_r \\ E_\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -E_\theta r\sin\theta d\varphi = 0 \\ E_r r\cos\theta d\varphi = 0 \\ E_\theta dr - E_r r d\theta = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Les deux premières équations impliquent que $d\varphi = 0$, soit que $\varphi = \text{cte}$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} dr - \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} r d\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta.dr = 2r\cos\theta.d\theta$$

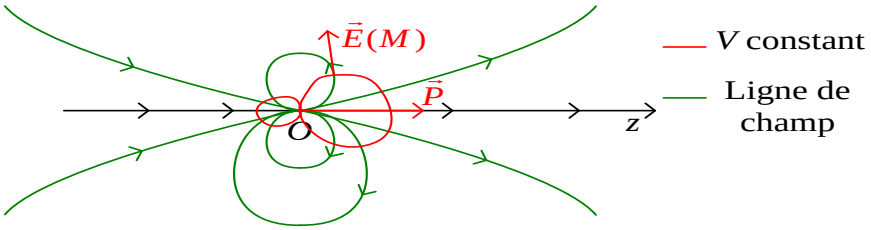
$$\Leftrightarrow \frac{dr}{r} = 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta$$

$$\Leftrightarrow \ln r = 2\ln|\sin\theta| + \text{cte}$$

$$\Leftrightarrow \text{r} = \text{K}\sin^2\theta$$

2) Equipotentielles

$$V(M) = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r} = \text{cte} \Leftrightarrow r^2 = K'\cos\theta$$



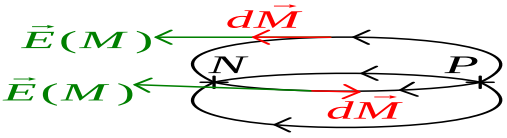
Remarque :

Pour une ligne de champ fermée Γ, parcourue « en suivant la flèche » :

$$\oint_\Gamma \underbrace{\vec{E}(M)\cdot d\vec{M}}_{\delta C>0} > 0$$

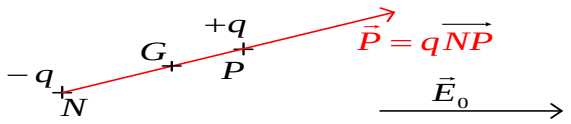
Mais $\vec{E}$ est à circulation conservative, donc $C_r(\vec{E}) = 0$ (!?!)

En réalité, l'approximation dipolaire n'est pas valable au voisinage de O ; plus précisément, on a pas, entre N et P, $\delta C > 0$:



8.2 Action d'un champ électrique uniforme sur un dipôle

On considère un doublet :



On suppose de plus le doublet rigide, c'est-à-dire que $a = NP = \text{cte}$.
On considère un champ électrique extérieur $\vec{E}_0$ uniforme.

8.2.1 Mouvement du centre de masse

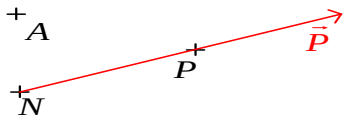
D'après le théorème de la résultante cinétique dans (R_{lab}) galiléen appliqué au doublet $\{-q \text{ en } N, +q \text{ en } P\}$:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}_{\to -q} + \vec{F}_{\to +q} = -q\vec{E}(N) + q\vec{E}(P) = \vec{0}$$

Donc G décrit un mouvement rectiligne uniforme.
Remarque : si $\vec{E}$ n'est pas uniforme, $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = q(\vec{E}(P) - \vec{E}(N))$

8.2.2 Théorème du moment cinétique

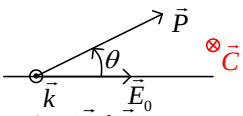
Théorème du moment cinétique appliqué à ce doublet dans (R_{lab}), en un point A fixe dans (R_{lab}) :



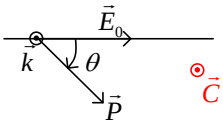
$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{\sigma}}{dt} &= \vec{M}_A(\vec{F}_{\to -q}) + \vec{M}_A(\vec{F}_{\to +q}) \\
&= \overrightarrow{AN} \wedge (-q\vec{E}_0) + \overrightarrow{AP} \wedge (q\vec{E}_0) \\
&= q(-\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}) \wedge \vec{E}_0 \\
&= q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E}_0 \\
&= \vec{P} \wedge \vec{E}_0
\end{aligned}$$

Soit $\vec{M}_{\text{ext}} = \vec{P} \wedge \vec{E}_0$

On dit que le champ $\vec{E}_0$ exerce sur le doublet un couple $\begin{cases} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{P} \wedge \vec{E}_0 \end{cases}$.



$\theta = (\vec{E}_0 \hat{,} \vec{P}) > 0$



$\theta = (\vec{E}_0 \hat{,} \vec{P}) < 0$

$\vec{C} = \vec{P} \wedge \vec{E}_0 = -PE_0 \sin\theta.\vec{k}$

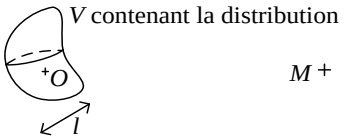
Le couple a ainsi tendance à ramener le dipôle de façon à ce que $\vec{P}$ et $\vec{E}_0$ soient alignés.

Positions d'équilibre :

$\vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \sin\theta = 0$; Si $\theta = 0$, l'équilibre est stable, si $\theta = \pi$, il est instable.

8.3 Développement multipolaire

8.3.1 Champ créé à grande distance par une distribution de charge donnée



$l << OM$

$Q_V = \sum_{q_i \in V} q_i$ ou $\iiint_V \rho(P) dV_{(P)}$

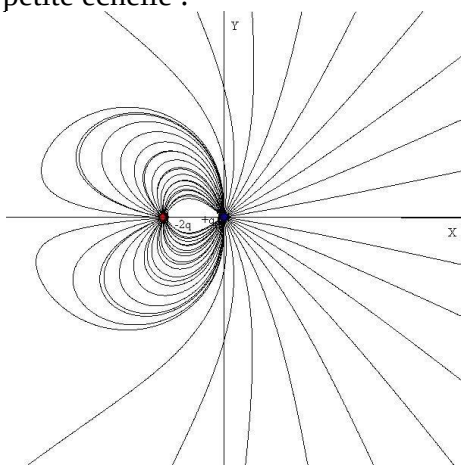
1er cas : $Q_V \neq 0$

Il crée à grand distance un champ identique à celui d'une charge ponctuelle Q_v située au barycentre G des charges ; $\sum_i q_i \overrightarrow{OM_i} = \underbrace{\left(\sum_i q_i\right)}_{Q_v} \overrightarrow{OG}$.

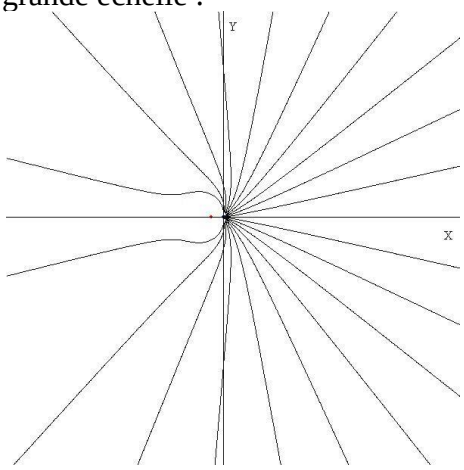
On parle alors de champ monopolaire.

Exemple de distribution de charge monopolaire :

petite échelle :



grande échelle :



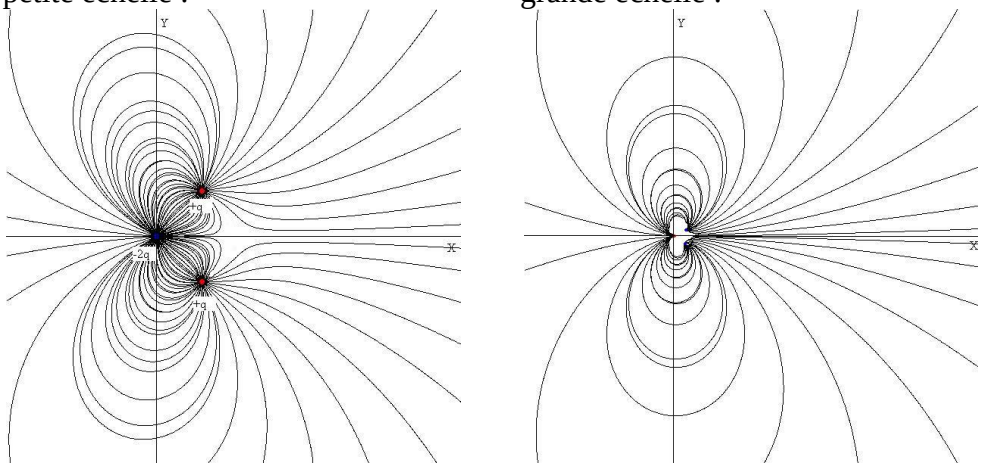
2ème cas : $Q_V = 0$, et P, barycentre des charges positives, n'est pas confondu avec N, barycentre des charges négatives :

$$\sum_{i \text{ tq } q_i > 0} q_i \overrightarrow{OM_i} = \underbrace{\left(\sum_{i \text{ tq } q_i > 0} q_i\right)}_{+Q>0} \overrightarrow{OP} \text{ et } \sum_{i \text{ tq } q_i < 0} q_i \overrightarrow{OM_i} = \underbrace{\left(\sum_{i \text{ tq } q_i < 0} q_i\right)}_{+Q<0} \overrightarrow{ON}$$

La distribution se comporte comme le dipôle $-Q$ en N, $+Q$ en P lorsqu'on en est situé à grande distance.

Exemple de distribution de charge dipolaire : H_2O

petite échelle : grande échelle :

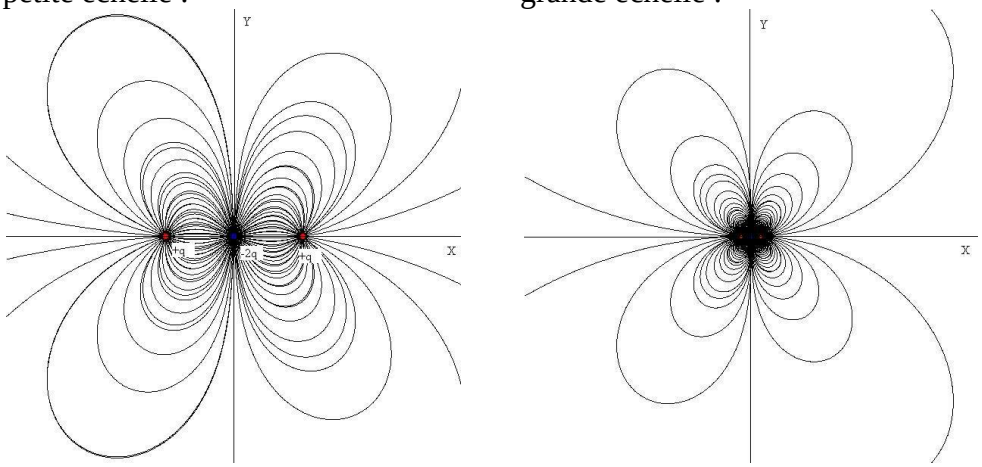


3ème cas : $Q_V = 0$ et les barycentres sont confondus.

On obtient un champ de type quadripolaire, ($\|\vec{E}\| \propto \frac{1}{r^4}$), octopolaire ($\|\vec{E}\| \propto \frac{1}{r^5}$)…

Exemple de distribution de charge quadripolaire : CO_2

petite échelle : grande échelle :



8.3.2 Application

- Les molécules se comportent comme des dipôles, par exemple :

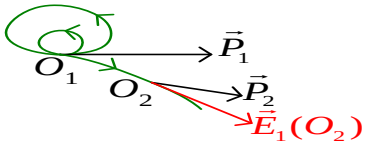
$^{+\delta}H - Cl^{-\delta}$: Cl est plus électronégatif que H. Cette molécule équivaut à :

$\overset{-\delta}{\underset{+}{N}}$ $\overset{+\delta}{\underset{+}{P}}$

$\vec{P} = \delta\overrightarrow{NP}$; la molécule est dite dipolaire

(c'est un dipôle indépendamment de l'environnement)

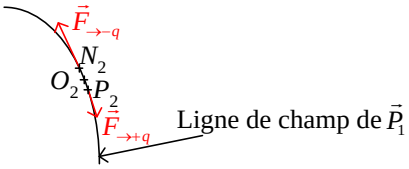
- Forces de Van der Waals :



Molécule en O_2, moment dipolaire $\vec{P}_2$ dans le champ créé par $\vec{P}_1$ en O_1.

1ère action : orientation ; $\vec{P}_2$ tend à s'aligner sur $\vec{E}_1(O_2)$

2ème action : le champ est inhomogène, la résultante des forces est donc non nulle.



$\vec{F}_{\to -q} = -q\vec{E}_1(N_2)$

$\vec{F}_{\to +q} = q\vec{E}_1(P_2)$

$\vec{F}_{\to \vec{P}_2} = q(\vec{E}_1(P_2) - \vec{E}_1(N_2))$, dirigée comme $-\vec{P}_2$

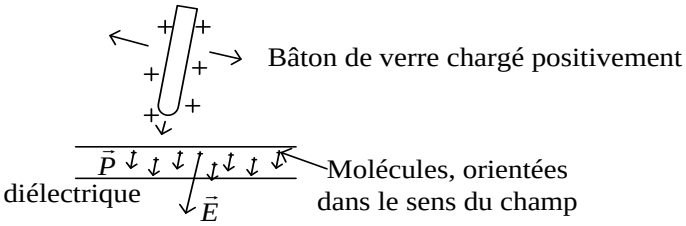
(E décroît en $1/r^3$, donc $\|\vec{E}_1(N_2)\| > \|\vec{E}_1(P_2)\|$)

Ainsi, $\vec{F}_{\to \vec{P}_2}$ est dirigée en moyenne vers O_1, on a donc une force attractive, décroissante en $1/r^7$. L'action a donc lieu à très courte distance.

- Action sur un diélectrique

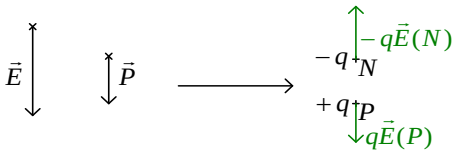
Diélectrique : matériau composé de molécules polaires.

Exemple : eau, papier, isolants.



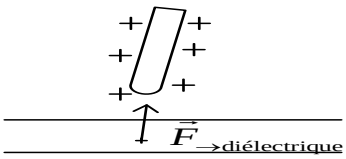
(1) Les dipôles (molécules) s'orientent dans le sens de $\vec{E}$

(2) Le champ $\vec{E}$ n'est pas uniforme.



N est plus proche que P du bâton. Donc $\|\vec{E}(N)\| > \|\vec{E}(P)\|$

Donc $\vec{F}_{\to \text{dipôle}}$ est de sens opposé à $\vec{E}$.



Donc $\vec{F}_{\rightarrow \text{diélectrique}}$ est dirigée vers le bâton. C'est vrai aussi pour une charge négative (bâton d'ambre…), puisque alors $\vec{E}$ sera dans l'autre sens, mais N et P seront aussi inversés, ce qui fait que la force exercée sur le dipôle sera dans le même sens que $\vec{E}$, c'est-à-dire vers le bâton.

Chapitre 2 :

Flux et théorème de Gauss

Chapitre 2 :

Flux et théorème de Gauss

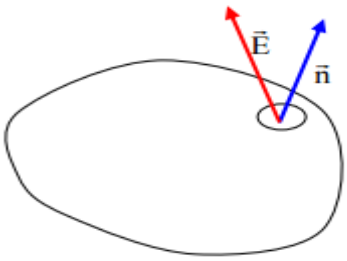
Dans le chapitre précédent, nous avons appris, à partir de la loi de Coulomb, à calculer le champ électrostatique créé par une distribution de charges en un point de l'espace. Un tel calcul n'est pas toujours simple car il fait appel aux intégrales. Nous allons voir qu'il est possible de déterminer de façon plus simple le champ électrostatique à partir du théorème de Gauss, à conditions que ce champ possède des symétries spatiales. On peut montrer que le théorème de Gauss et la loi de Coulomb sont formellement identiques (on peut dériver l'un de l'autre). Mais le théorème de Gauss va nous apporter un point de vue beaucoup plus riche sur la nature du champ électrique que la seule loi de Coulomb (comme le concept d'énergie en mécanique vis-à-vis des lois de Newton). De plus, le théorème de Gauss est toujours valable en régime variable (dépendant du temps) et constitue de se fait une des quatre équations de Maxwell alors que la loi de Coulomb n'est plus valable en régime variable.

1. Flux du champ électrostatique

1.1 Flux élémentaire du champ électrostatique

- Le flux élémentaire de $\vec{E}$ à travers la surface élémentaire d$\vec{S}$ est par définition :

$d\phi = \vec{E}.d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = dS.\vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire de la surface



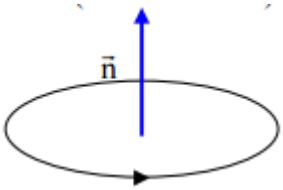
- L'unité du flux est **V.m**
- Le flux élémentaire du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q placé en O à travers une surface élémentaire dS placée en M a pour expression :

$d\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{OM^3}\overline{OM}.d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{OM^2}dS.\cos(\alpha)$ avec α angle entre $\overline{OM}$.et $d\vec{S}$

1.2 Flux du champ électrostatique à travers une surface finie

Le flux est la somme des flux élémentaires : $\phi = \iint_S d\phi$

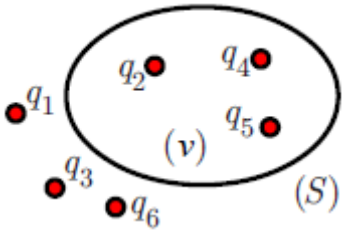
On distingue deux types de surface, les surfaces fermées (qui sépare l'espace en deux sous-ensembles : le volume intérieur à la surface fermée et le volume extérieur) et les surfaces ouvertes. Pour une surface fermée $\vec{n}$ est orienté très souvent vers l'extérieur (flux sortant). Pour une surface (ouverte) s'appuyant sur un contour, il y a une dépendance entre l'orientation du contour et le vecteur $\vec{n}$ (tire-bouchon).



2. Théorème de Gauss

2.1 Définition

Soient une distribution quelconque de charges (ponctuelles ou non) et une surface fermée S. Pour les charges situées à l'extérieur de S le flux est nul, pour les charges situées à l'intérieur $\phi = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$.



Par conséquent, le flux du champ résultant à travers (S) n'est dû qu'aux seules charges intérieures à S :

$$\boxed{\phi = \iint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \sum_i \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}.}$$

<u>Remarques</u>

- Le théorème de Gauss permet de trouver $\vec{E}$ dans des situations de haute symétrie.
- Il est applicable pour tout champ en $\frac{1}{r^2}$ (par exemple pour le champ de gravitation).

2.2 Exemples de calculs du champ par Théorème de Gauss

2.2.1 Plan uniformément chargé

On considère :

- un plan infini portant la charge σ

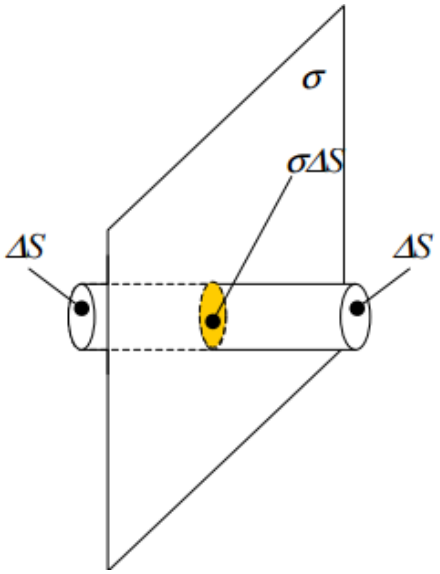
- un point M situé hors du plan

Direction du champ en M ?⟹ symétrie du problème

Module E du champ E ? ⟹ Théorème de Gauss

Il faut déterminer la surface de Gauss :

- un cylindre de section ΔS d'axe _|_ au plan



$$\emptyset = \oint_S \vec{E}.d\vec{S}$$

$$\emptyset = \oint_{\Delta S} \vec{E}.d\vec{S} + \oint_{Slat} \vec{E}.d\vec{S} + \oint_{\Delta S} \vec{E}.d\vec{S}$$

$$\emptyset = E.\Delta S + 0 + E.\Delta S = 2\,E.\Delta S$$

2.2.2 Sphère uniformément chargée en surface

On considère :

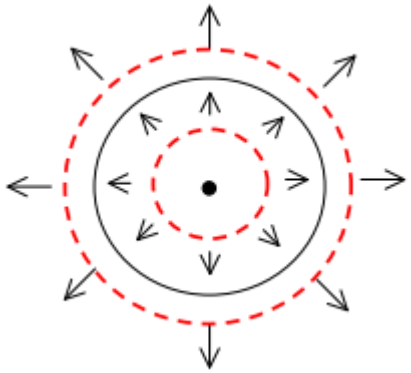
- une sphère de rayon R portant en surface la densité de chargese σ

- un point M quelconque de l'espace

Direction du champ en M ?⟹ symétrie du problème

Module E du champ E ? ⟹ Théorème de Gauss

Il faut déterminer la surface de Gauss :



Une sphère de rayon r et de centre O.

2 cas se présentent :

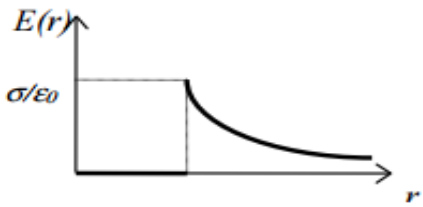
- r < R

Théorème de Gauss ⟹ $E.4\pi r^2 = 0$ ⟹ **E = 0** le champ E est nul à l'intérieur de la sphère

- r > R

Théorème de Gauss ⟹ $E.4\pi r^2 = \frac{\sigma.4\pi R^2}{\varepsilon_0}$ ⟹ $\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$

Représentation graphique :



3. Loi Locale et Loi Intégrale

Soit une surface (S) fermée, contenant une charge q répartie uniformément dans le volume v qu'elle entoure, la densité volumique étant ρ.

On a alors :

$$\emptyset = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_v \rho dv = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Cette écriture constitue la forme intégrale du théorème de Gauss.

Le théorème de la divergence permet d'écrire par ailleurs :

$$\emptyset = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_v div\vec{E}\, dv$$

De ces relations, on déduit la forme locale suivante pour le théorème de Gauss :

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

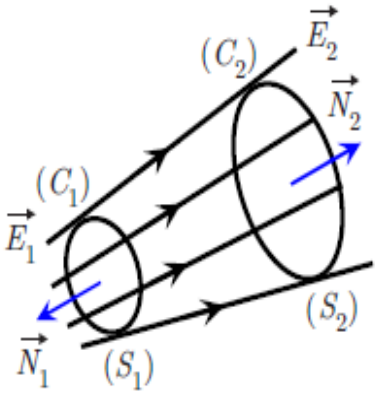
Cette deuxième loi locale de l'électrostatique (comme la première $\vec{E}$ = -$\overrightarrow{grad}$ V) présente un caractère général, elle ne fait intervenir que le point considéré indépendamment de toute symétrie globale.

4. Conservation du flux

Un tube de champ est constitué par tous les lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé : contour (C1) sur la figure, qui devient (C2) un peu plus loin, dans le sens du champ.

Si le tube compris entre (C1) et (C2) ne contient aucune charge, on a ρ = 0.

Comme aucun flux ne sort de la paroi latérale du tube, on a :



$$\emptyset_{tube} = \emptyset_1(sortant) + \emptyset_2(sortant) = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_0} dv = 0$$

D'après l'orientation des vecteurs $\vec{N}_1$ et $\vec{N}_2$, on voit que $\emptyset_1(sortant)$ est négatif, alors que $\emptyset_2(sortant)$ est positif.

Si on choisit d'orienter les deux normales dans le sens de$\vec{E}$, on peut définir des flux $\psi_1 et\ \psi_2$ de même signe, tels que $\psi_1 = -\phi_1$ et $\psi_2 = -\phi_2$. On peut alors écrire : $\psi_1 = \psi_2$.

Qui exprime à l'échelle globale que le flux est conservatif à travers les différentes sections du tube.

A l'échelle locale, en l'absence de charge, la conservation du flux de $\vec{E}$ s'exprime simplement par :

$$\boxed{div\vec{E} = 0}$$

5. Equations de Poisson et de Laplace

En remplaçant le champ électrostatique dans la forme locale du théorème de Gauss par le gradient du potentiel électrostatique, nous obtenons :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \\ div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{div}\left(-\overrightarrow{grad}V\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

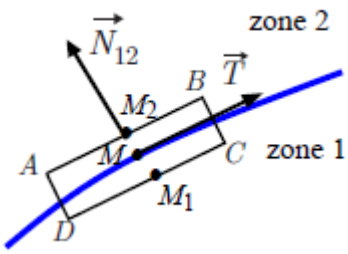
Or $\boldsymbol{div}\left(\overrightarrow{grad}V\right) = \Delta V$. On en déduit: $\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$ (équation de Poisson)

Dans un milieu dépourvu de charges (dans le vide), V vérifié l'équation de Laplace :

$$\boxed{\Delta V = 0}$$

La résolution de l'équation de Poisson ou l'équation de Laplace associée aux conditions aux limites est un problème classique en électrostatique. A l'exception de quelques cas particuliers, la plupart de situations pratiques nécessitent l'utilisation des méthodes de résolutions numériques.

6. Conditions de passage à travers une interface



Soit deux point M_1 et M_2 infiniment voisins du point M pris sur l'interface séparant les deux distributions.

En ces points, on a respectivement :

$$\overrightarrow{E_1} = E_{1T}\vec{T} + E_{1N}\overrightarrow{N_{12}}$$

$$\overrightarrow{E_2} = E_{2T}\vec{T} + E_{2N}\overrightarrow{N_{12}}$$

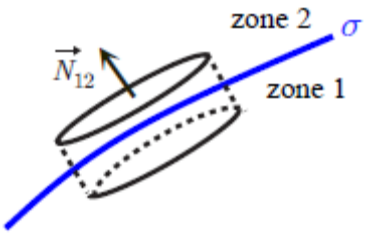
Avec $\vec{T}$ est le vecteur unitaire porté par la tangente en M à l'interface, et $\overrightarrow{N_{12}}$ est le vecteur unitaire normal à l'interface, orienté du milieu (1) vers le milieu (2).

On veut exprimer que la circulation de $\vec{E}$ le long du contour fermé élémentaire (C) représenté sur la figure est nulle. En supposant que la contribution des côtés AD et BC est négligeable devant celle des côtés AB et DC, on peut écrire :

$\oint_C \vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0 = E_{1T}AB - E_{2T}CD$ avec AB = CD

On en déduit que : $\boxed{E_{1T} = E_{2T}}$

Supposons que l'interface porte une charge surfaciqueσ.



On considère un cylindre infiniment plat représenté sur la figure ci contre, et on cherche à déterminer le flux de E sortant de ce cylindre.

La contribution des densités volumiques $\rho_1$et ρ_2 à ce flux étant un infiniment petit du 3ème ordre comparée à la contribution de la densité surfacique qui est de 2ème ordre, on peut ignorer les charges volumiques et écrire :

$$\phi = \int_{Stotale} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E_{2N}S - E_{1N}S$$

Avec S la surface de base du cylindre

Le théorème de Gauss s'exprime par : $\phi = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$

On en déduit : $\boxed{\overrightarrow{E_{2N}} - \overrightarrow{E_{1N}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{N_{1N}}}$

Chapitre 3 :

Conducteurs en équilibre

Chapitre 3 :

Conducteurs en équilibre

Les conducteurs présentent la particularité de posséder des charges électriques libres de se déplacer très rapidement dans tout le matériau. Cette caractéristique leur confère des propriétés électrostatiques spécifiques que nous détaillerons dans ce chapitre. Nous décrirons les propriétés liées à un ensemble de conducteurs à l'équilibre et introduirons les notions de capacités et capacités mutuelles. Enfin les méthodes permettant de calculer les champs électriques et les potentiels à l'extérieur d'un système de conducteurs à l'équilibre seront discutées.

1. Loi de conservation de la charge

Un conducteur est un corps dans lequel il existe un grand nombre de charges électriques qui sont susceptibles de se déplacer librement.
Les conducteurs les plus connus sont les métaux. Il existe aussi des électrolytes, système dans lesquels des ions libres peuvent se déplacer. Nous n'en parlerons que ponctuellement, les résultats présentés dans les paragraphes suivants étant tout à fait généraux et applicables à cette classe de matériaux.

Enoncé de la loi de conservation

Dans un système isolé, la charge électrique se conserve : $\boxed{\sum q = 0}$

Par exemple, un atome non ionisé se comporte comme une particule électriquement neutre.

2. Corps Conducteurs et corps isolants

a) Conducteurs.

En physique est qualifié de conducteur un matériau qui peut transmettre une charge électrique. Les métaux sont tous conducteurs mais plus ou moins. Dans la liste des conducteurs on trouve généralement des métaux comme l'aluminium, l'argent, le bronze, l'étain, le fer, le nickel, l'or, l'acier, le graphite, le laiton, le zinc. Le cuivre, est utilisé de fils électrique.

b) Isolants.

A l'opposé un isolant (ou diélectrique) est un matériau qui permet d'empêcher le passage du courant électrique entre deux conducteurs. Dans la liste des isolants on trouve généralement le caoutchouc, le papier, la laine, le plastique, le bois, le verre. On utilise le caoutchouc pour recouvrir les fils électrique.

L'AIR EST HABITUELLEMENT UN ISOLANT. IL EST PARFOIS CONDUCTEUR EN CAS D'ORAGE, CERTAINS MATERIAUX ISOLANTS DEVIENNENT DONC CONDUCTEURS DANS DES CONDITIONS DIFFERENTES.

3. Equilibre électrostatique d'un conducteur

3.1 Définition d'un conducteur

Définition : Un conducteur est un corps dans lequel il existe un grand nombre de charges électriques qui sont susceptibles de se déplacer librement.

Les conducteurs les plus connus sont les métaux. Il existe aussi des électrolytes, système dans lesquels des ions libres peuvent se déplacer. Nous n'en parlerons que ponctuellement, les résultats présentés dans les paragraphes suivants étant tout à fait généraux et applicables à cette classe de matériaux.
Les conducteurs métalliques se caractérisent par une grande quantité d'électrons pouvant se déplacer librement et très rapidement dans le matériau. Cette spécificité des conducteurs est à l'origine de propriétés électrostatiques.

3.2 Équilibre électrostatique d'un conducteur

• Dans un isolant, les charges restent à l'endroit où elles ont été apportées (ou enlevées).
• Dans un conducteur, les charges sont mobiles (ou libres) et sont donc susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique même très faible.

Définition : Un conducteur est à l'équilibre électrostatique lorsqu'aucune charge électrique ne se déplace à l'intérieur de celui-ci.

Cela a pour conséquence qu'en tout point intérieur au corps, le champ $\overrightarrow{E_{int}}$ est nul.

L'équation locale : $div\overrightarrow{E_{int}} = \frac{\rho_{int}}{\varepsilon_0}$

entraîne que l'équilibre s'exprime finalement par :

$$\boxed{\overrightarrow{E_{int}} = \overrightarrow{0} \qquad \rho_{int} = 0}$$

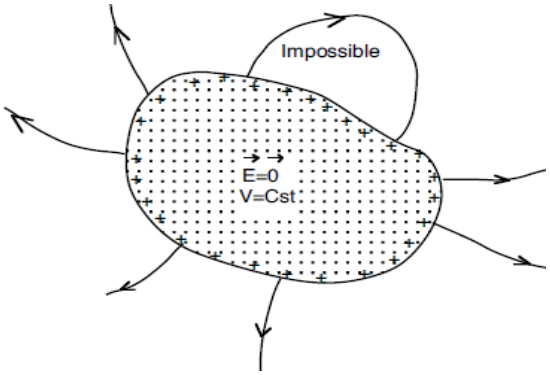
Si le champ à l'intérieur du conducteur est nul, alors le conducteur à l'équilibre électrostatique est **équipotentiel.**

3.2.1 Lignes de champ

Dans un conducteur, même chargé, le champ électrique à l'intérieur $\overrightarrow{E_{int}}$ est nul. $\Longrightarrow V_{int} = cst$. Mais ce n'est pas forcément le cas à l'extérieur, en particulier si le conducteur est chargé. Puisqu'un conducteur à l'équilibre est équipotentiel, cela entraîne alors que, sa surface étant au même potentiel, le champ électrostatique est normal à la surface d'un conducteur. Par ailleurs, aucune ligne de champ ne peut « revenir » vers le conducteur. En effet, la circulation du champ le long de cette ligne impose

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

Si les points A et B appartiennent au même conducteur, alors la circulation doit être nulle, ce qui est impossible le long d'une ligne de champ (où, par définition$\vec{E}$ $est\ parallèle$ à $\overrightarrow{dl}$).



3.2.2 Distribution des charges

Si un conducteur est chargé, où se trouvent les charges non compensées? Supposons qu'elles soient distribuées avec une distribution volumique ρ. Prenons un volume quelconque V situé à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique. En vertu du théorème de Gauss, on a

$$\oiint_S \vec{E}\overrightarrow{dS} = \iiint_v \frac{\rho}{\varepsilon_0} dv = 0$$

Puisque le champ $\vec{E}$ est nul partout. Cela signifie que $\rho = 0$ (autant de charges + que de charges -) et donc, qu'à l'équilibre, aucune charge non compensée ne peut se trouver dans le volume occupé par le conducteur. Toutes les charges non compensées se trouvent donc nécessairement localisées à la surface du conducteur.

Ce résultat peut se comprendre par l'effet de répulsion que celles-ci exercent les unes sur les autres. A l'équilibre, les charges tendent donc à se trouver aussi éloignées les unes des autres qu'il est possible de le faire.

3.2.3 Théorème de Coulomb

Si le conducteur est chargé on a également$\overrightarrow{E_{int}} = \vec{0}$, et la charge ne peut se répartir que sur la surface ($\sigma \neq 0$). Les charges surfaciques sont à l'équilibre si la surface est une surface équipotentielle.

La surface d'un conducteur à l'équilibre étant une surface équipotentielle, au voisinage de la surface le champ est normal à la surface même et vaut

$$\boxed{\overrightarrow{E_{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$$

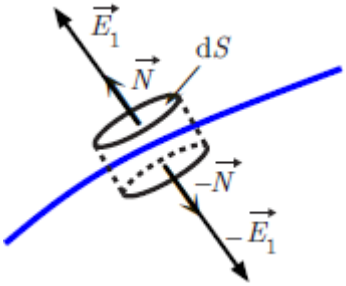
où n est un vecteur unitaire normal au conducteur et dirigé vers l'extérieur.

On appelle cage de Faraday une cavité à l'intérieur d'un conducteur (où $\vec{E}$= $\vec{0}$).

3.2.4 Pression électrostatique

Soit dS un élément de surface sur un conducteur chargé d'une densité surfacique σ.

Le théorème de Gauss appliqué au cylindre élémentaire indiqué sur la figure ci contre :



$$E_1 dS + E_1 dS = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$$

Le champ extérieur créé par l'élément dS seul est donc :

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

Or le champ extérieur au voisinage de dS pris sur le conducteur chargé est $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

On en déduit que le champ créé par le reste du conducteur est :

$$\overrightarrow{E_2} = \vec{E} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

Autrement dit, la force électrostatique d$\vec{F}$ subie par cette charge dq =σ dS de la part de l'ensemble des autres charges du conducteur vaut

$$\overrightarrow{dF} = dq\overrightarrow{E_2} = \sigma dS\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{n}dS$$

Quel que soit le signe de σ, la force est normale et toujours dirigée vers l'extérieur du conducteur. Cette propriété est caractéristique d'une pression, force par unité de surface.
Ainsi, la pression électrostatique subie en tout point d'un conducteur vaut

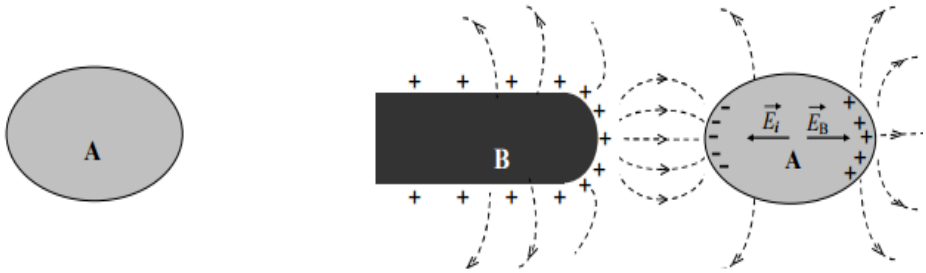
$$\boxed{P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$$

Cette pression est en général trop faible pour arracher les charges de la surface du conducteur. Mais elle peut déformer ou déplacer celui-ci, les charges communiquant au solide la force électrostatique qu'elles subissent.

4. Influence de deux conducteurs chargés

4.1 Influence partielle

Considérons un conducteur A électriquement neutre (voir figure). Approchons de ce dernier, un conducteur B chargé positivement, tel que représenté sur la figure ci-dessous. Le conducteur B crée dans l'espace et en particulier dans le conducteur A un champ électrique $\overrightarrow{E_B}$.

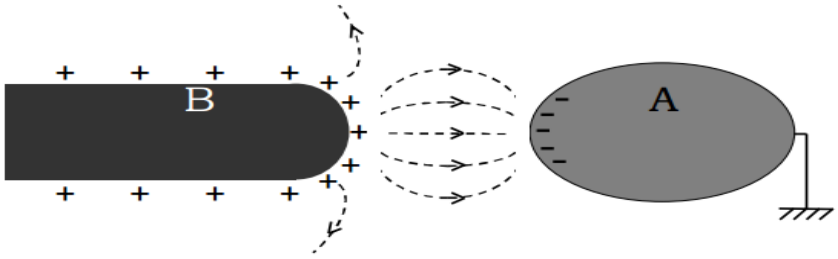


Les électrons libres du conducteur A vont, sous l'action de ce champ, se déplacer dans le sens inverse de $\overrightarrow{E_B}$. Ces électrons s'accumulent progressivement sur la face en regard de B et forment à l'équilibre des charges négatives dont la résultante est -Q. A l'inverse, des charges positives, dont la résultante est +Q, vont apparaître sur l'autre face par défaut d'électrons comme le montre la figure ci dessus. Ces charges, qui résultent d'une électrisation par influence, apportent leur contribution au champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur.

Elles créent un champ induit $\overrightarrow{E_i}$qui vient s'opposer au champ inducteur $\overrightarrow{\mathrm{E_B}}$ et réduire ainsi le champ électrique total. A l'intérieur du conducteur A les électrons libres ne cessent leur mouvement que lorsque le champ électrique total s'annule. Le système formé par les deux conducteurs atteint alors un état d'équilibre.

Lignes de champ : La topographie de l'espace électrique, représentée sur la figure ci-dessus (droite), montre que seules certaines lignes de champ, qui émanent du corps inducteur B, aboutissent au conducteur A. Il en résulte, en vertu du théorème des éléments correspondants, que la charge Q créée par influence, est inférieure à la charge inductrice du conducteur B.

On relie, à présent le conducteur A à la terre, au moyen d'un fil conducteur (figure ci dessous). La terre et le conducteur forment ainsi un seul conducteur ; les charges positives sont alors repoussées vers la terre. Le potentiel de ce conducteur est nul et plus aucune ligne de champ ne le quitte.

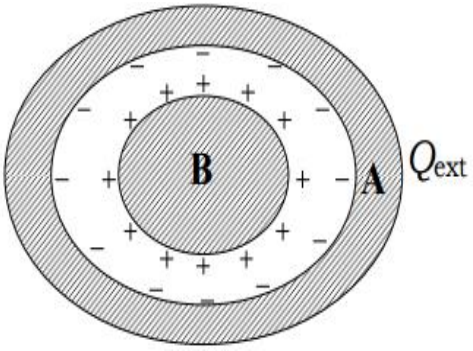


Dans ces exemples, l'influence est dite partielle, car toutes les lignes de champ issues du conducteur B n'aboutissent pas sur A. Nous pouvons créer des conditions d'influence totale en plaçant tout simplement le conducteur B à l'intérieur d'un conducteur creux A.

4.2 Influence totale

On parle d'influence totale lorsque toutes les lignes de champ partant de B aboutissent sur A. Ceci est obtenu lorsque A entoure complètement B (figure ci contre). L'application du théorème des éléments correspondants, montre que la charge qui apparaît sur la surface interne de A est égale et opposée à la charge du conducteur B.

$$Q_B = -Q_A$$

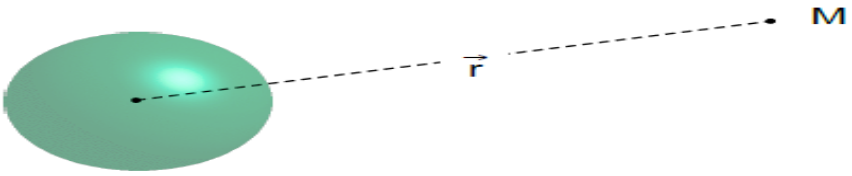


Applications :

1. Protection contre la foudre : un paratonnerre est en général complété par un réseau de câbles entourant l'édifice à protéger, reliés à la Terre.
2. Tout conducteur transportant un courant faible est entouré d'une gaine métallique (appelée blindage) reliée au sol. Cette gaine est parfois simplement le châssis de l'appareil.

5. Capacité d'un conducteur isolé

Soit un conducteur à l'équilibre électrostatique chargé avec la densité surfacique σ et isolé dans l'espace



Le potentiel créé en M par la distribution de charge est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r}$$

La charge totale répartie sur la surface est :

$$Q = \iint_S \sigma dS$$

Le système considéré est caractérisé par σ, Q et V.

On modifie la densité surfacique σ en la multipliant par un coefficient k_1 : $\sigma' = \sigma K_1$
Dans ce cas, le potentiel en M et la charge présente sur le conducteur sont modifiés :

$$Q' = QK_1 \text{ et } V'(M) = K_1 V(M)$$

Le système est dans un nouvel état d'équilibre électrostatique parfaitement défini par σ', Q' et V'

Du fait de la dépendance linéaire de Q et V vis-à-vis de la densité surfacique, il résulte que toute combinaison linéaire de σ et σ' donne lieu à un nouvel état d'équilibre :

$$\sigma'' = \sigma K_1 + \sigma' K_2 \Longrightarrow \begin{cases} Q'' = QK_1 + Q'K_2 \\ V'' = VK_1 + V'K_2 \end{cases}$$

C'est le principe de la **superposition des états d'équilibre**.

Quel que soit l'état d'équilibre, il existe un rapport constant entre Q et V(M).

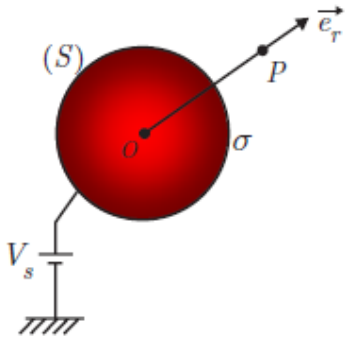
Ceci est vrai pour le potentiel à la surface du conducteur, c.à.d. le potentiel auquel est le conducteur.

Le coefficient de proportionnalité entre la charge totale et le potentiel du conducteur est appelé la **capacité C**. Il se mesure en Farad (F), si Q est en coulomb et V en Volt.

$$\boxed{Q=C.V}$$

La capacité est une grandeur positive, elle dépend du matériau (à travers sa permittivité diélectrique de celui-ci) et de la géométrie du conducteur.

Exemple : capacité d'une sphère chargée



Supposons que la sphère est portée au potentiel V_S :

Au point P, on a :

$\vec{E} = K\frac{Q}{(OP)^2}\overrightarrow{e_r}$ V=KQ/(OP)

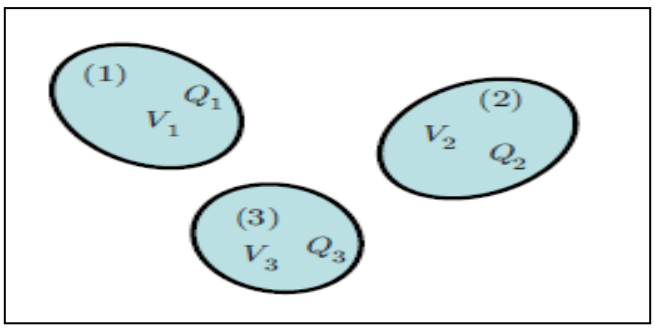
Et sur la surface :

$V_S = K\frac{Q}{R}$ on en déduit, avec $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_S} = \frac{R}{K} = 4\pi\varepsilon_0 R}$$

6. Système de n conducteurs en équilibre

Pour simplifier, on se limite à un système de trois conducteurs. Il s'agit de trouver les relations entre les charges et les potentiels des différents conducteurs.



Pour cela, on définit trois états d'équilibre auxquels on applique ensuite le principe de superposition.

1er état : conducteur nº 1 au potentiel $V_1 > 0$ par exemple, les autres au potentiel 0.

2eme état : conducteur nº 2 au potentiel V_2, les autres au potentiel 0.

3eme état : conducteur nº 3 au potentiel V_3, les autres au potentiel 0.

1er état : Q_{11}, Q_{21}, Q_{31} étant les charges portées respectivement par les conducteurs 1, 2 et 3 et on a :

$Q_{11} = C_{11}V_1$ $\quad C_{11} > 0$

$Q_{21} = C_{21}V_1$ $\quad C_{21} < 0$ car charge $Q_{21} < 0$

$Q_{31} = C_{31}V_1$ $\quad C_{31} < 0$ car charge $Q_{31} < 0$

Avec $|C_{21} + C_{31}| \leq C_{11}$ (influence partielle)

2eme état : $Q_{12} = C_{12}V_2$

$Q_{22} = C_{22}V_2$

$Q_{32} = C_{32}V_2$

3eme état : $Q_{13} = C_{13}V_3$

$Q_{23} = C_{23}V_3$

$Q_{33} = C_{33}V_3$

Superposition des potentiels :

$$V_1 + 0 + 0 = V_1$$

$$0 + V_2 + 0 = V_2$$

$$0 + 0 + V_3 = V_3$$

Superposition des charges :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3$$

$$Q_3 = C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3$$

La relation entre charges et potentiels est une relation matricielle. La matrice C ainsi définie, soit :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} C_{12} C_{13} \\ C_{21} C_{22} C_{23} \\ C_{31} C_{32} C_{33} \end{bmatrix}$$

Constitue la matrice des coefficients d'influence du système des trois conducteurs.

On peut généraliser la relation entre charges et potentiels à un système de n conducteurs. Sous forme matricielle, cette relation s'écrit :

$$[Q_i] = [C_{ij}][V_j]$$

Où les indices i et j varient entre 1 et n. cette écriture signifie qu'il faut sommer cette expression sur j.

Propriétés de la matrice C :

- ✓ Elle est symétrique : $C_{ij} = C_{ji}$ (identité de Gauss),
- ✓ Les termes diagonaux sont positifs : $C_{ii} > 0$, ils constituent les coefficients de capacité
- ✓ Les termes non diagonaux sont négatifs : $C_{ij} < 0$, ce sont les coefficients d'influence.

Exemple : sphère conductrices en influence

Soit deux sphères conductrices chargées, de rayon R_1 et R_2, dont les centres sont distants de d, tel que d >> R_1, R_2. On demande de calculer les coefficients de capacité C_{11}, C_{22} et les coefficients d'influence C_{12} et C_{21} d'un tel système.

La superposition des états d'équilibre permet d'écrire :

$$\begin{cases} V_1 = D_{11} Q_1 + D_{12} Q_2 \\ V_2 = D_{21} Q_1 + D_{22} Q_2 \end{cases}$$

La distance d étant très grande comparée à R_1 et R_2, on peut assimiler le potentiel de (S_1) dû à (S_2) au potentiel créé par (S_2) au centre O_1, soit $\frac{KQ_2}{d}$. En faisant de même pour le potentiel de (S_2) dû à (S_1), on obtient :

$$\begin{cases} V_1 = \frac{KQ_1}{R_1} + \frac{KQ_2}{d} \\ V_2 = \frac{KQ_1}{d} + \frac{KQ_2}{R_2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad D = K \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

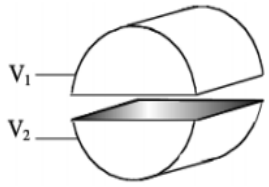
La matrice C est obtenue en prenant l'inverse de la matrice D.

7. Capacité d'un condensateur

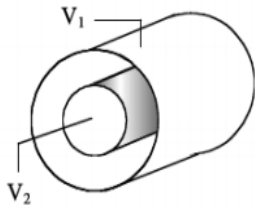
7.1 Définition

On appelle condensateur tout système de deux conducteurs en influence électrostatique.

Il y a deux sortes de condensateurs :



armatures rapprochées



influence totale

Les deux armatures sont séparées par un matériau isolant (un diélectrique), ce qui a pour effet d'accroître la capacité du condensateur.

Soient deux conducteurs (A_1) et (A_2), portant respectivement une charge Q_1 et Q_2 et de potentiel V_1 et V_2.

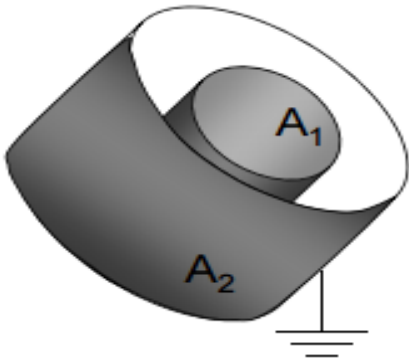
$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

7.2 Condensateur : influence totale

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Les coefficients C_{ij} sont indépendants des valeurs de Q et de V $\Longrightarrow$ pour les trouver, il faut considérer des cas particuliers simples.

<u>Cas d'un condensateur à influence totale</u>



$$Q_2 = Q_2^{ext} + Q_2^{int} = Q_2^{ext} - Q_1$$

$$Q_2^{ext} = 0 \quad (V_2 = 0)$$

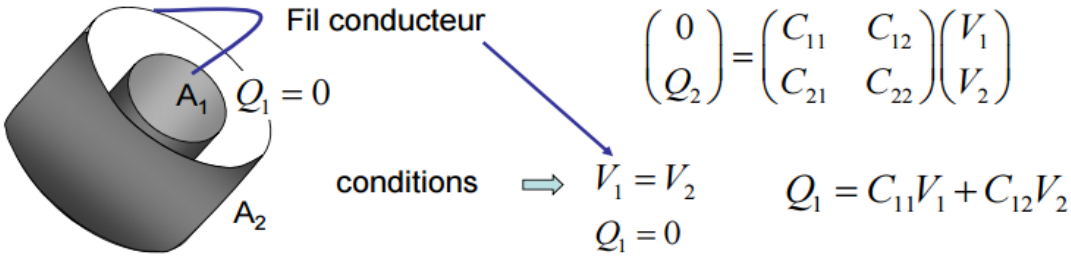
$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Q_1 = C_{11}V_1$ $\qquad$ $Q_2 = C_{21}V_1$

La relation n'est vraie que si (A_2) est à la masse $\rightarrow$ $Q_1 = - Q_2$

La relation est générale $\rightarrow$ $C_{11} = - C_{21}$

7.3 Condensateur : convention

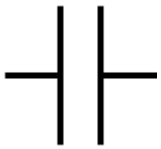


$C_{11} = - C_{12}$

$C_{11} = - C_{21} = -C_{12}$

Convention

La capacité C du condensateur, sa charge Q et la tension entre armatures sont définies de la façon suivante:



$C = C_{11}$

$U = V_1 - V_2$

$Q = Q_1$

La relation des condensateurs →

$Q = CU$

7.4 Condensateur sphérique

Pour obtenir la capacité C d'un condensateur, il faut calculer la relation entre sa charge Q et sa tension U

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}\overrightarrow{dl} = \frac{Q}{C}$$

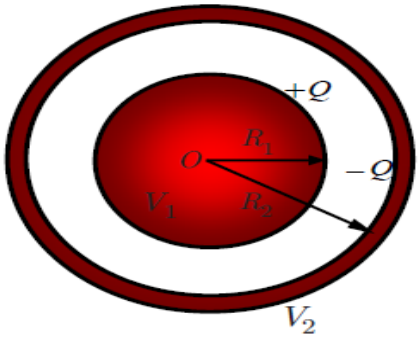
Condensateur sphérique

Condensateur constitué de deux armatures sphériques de même centre O, de rayons respectifs R_1 et R_2, séparées par un vide ($R_2 > R_1$)

D'après le théorème de Gauss, le champ électrostatique en un point M situé à un rayon r entre les deux armatures vaut

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$$

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\overrightarrow{dr} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

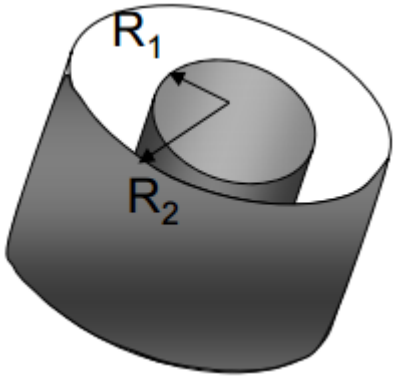


$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

7.5 Condensateur cylindrique

Condensateur constitué de deux armatures cylindriques de même axe, de rayons respectifs R_1 et R_2, de longueur infinie et séparées par un vide ($R_2 > R_1$). Soit λ la charge par unité de longueur du cylindre

D'après le théorème de Gauss, le champ électrostatique en un point M situé à un rayon r entre les deux armatures vaut



$$\vec{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\overrightarrow{u_\rho}$$

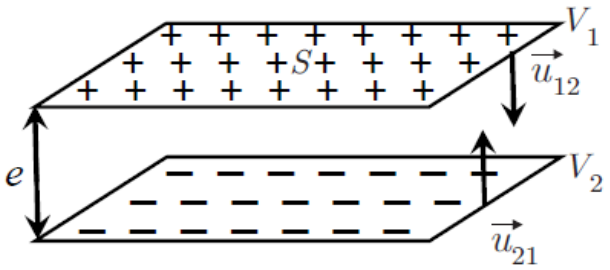
$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\overrightarrow{d\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{R_2}{R_1}$$

Capacité par unité de longueur est :

$$\boxed{C = \frac{\lambda}{U} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{1}{ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

7.6 Condensateur plan

Soient deux plans conducteurs infinis et parallèles ; dans l'espace qui les sépare, toute ligne partant de l'un ne peut qu'arriver à l'autre ; ils sont donc en influence totale et, à ce titre, se conduisent en condensateur, bien qu'il ne s'agisse pas d'un conducteur creux en contenant un autre. La symétrie de révolution par rapport à tout axe orthogonal aux plans fait que les lignes de champ leur sont elles aussi orthogonales. L'invariance par translation entraîne que les plans sont uniformément chargés. Le théorème des éléments correspondant indique que les densités volumiques sont opposées ; notons les ±σ, comme sur la figure ci dessous (les plans n'y sont pas infinis, on y revient juste après). L'application du théorème de Gauss à un tube de champ fermé par une surface parallèle aux plans et par une surface arbitraire contenue dans un conducteur (voir figure ci dessous) donne un champ uniforme de norme $E = \sigma/\varepsilon_0$ et enfin la circulation de ce champ sur une ligne de champ d'un conducteur à l'autre, égale à la différence de potentiel, conduit à $U = E.e = \sigma e/\varepsilon_0$ où e est la distance entre les plans.



Si Q = σ S est la charge du disque de surface S, on a en bonne approximation ou rigoureusement selon qu'il y a ou non un anneau de garde et après quelques calculs élémentaires :

$$Q = \frac{\varepsilon_0 S}{e} U$$

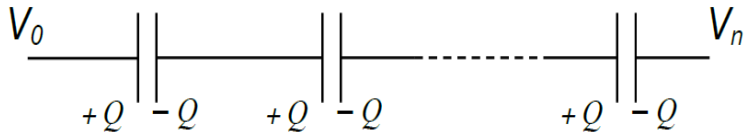
d'où une capacité

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$$

8. Association de condensateurs

8.1 Association en série

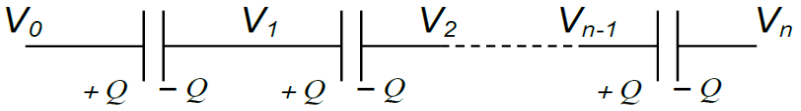
Soit n condensateurs de capacité C_i associé en série :



- On porte aux potentiels respectifs V_0 et V_n les deux extrémités de la chaine de condensateurs.
- La charge +Q apparaît sur la première armature et par influence, il apparaît les charges ±Q sur les armatures de chaque condensateur.

La tension aux bornes du système peut s'écrire :

$V_0 - V_n = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \ldots + (V_{n-1} - V_n)$



La charge des condensateurs est :

$Q_1 = C_1 (V_0 - V_1) \quad \rightarrow \quad V_0 - V_1 = \frac{Q_1}{C_1}$

$Q_i = C_i (V_{i-1} - V_i) \quad \rightarrow \quad V_{i-1} - V_i = \frac{Q_i}{C_i}$

D'où :

$$V_0 - V_n = U = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \cdots + \frac{Q_n}{C_n}$$

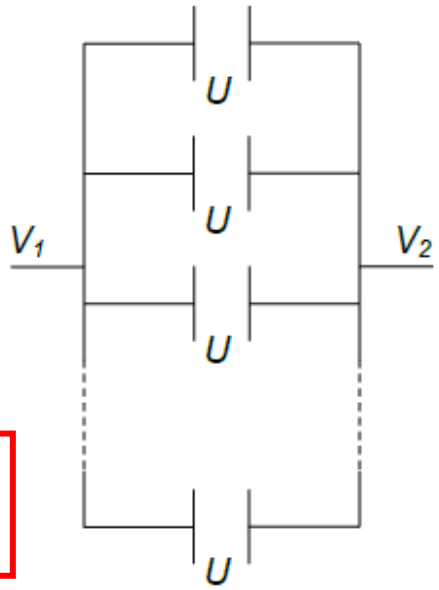
Avec : $Q_i = Q \qquad U = Q \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$

La capacité équivalente à l'ensemble des n condensateurs en parallèle est donnée par la relation :

$$\boxed{\frac{1}{C_{éq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

8.2 Association en série

Toutes les armatures sont soumises à la même différence de potentiel donc à la même tension U.
Pour chaque condensateur :
$Q_i = C_i.U$



La charge totale portée par l'ensemble est :

$Q_{tot} = \sum_1^n Q_i = \sum_1^n C_i U$

D'ou la capacité équivalente à l'ensemble des condensateurs en parallèle :

$$\boxed{C_{éq} = \sum_{i=1}^{n} C_i}$$

Chapitre 4 :

Energie Electrostatique

Chapitre 4 :

Energie Electrostatique

Au chapitre 3, nous avons vu que lorsqu'une force est conservative, il est possible de lui associer une énergie potentielle qui conduit à une loi de conservation de l'énergie. Nous allons voir que la force de Coulomb entre charges électriques est conservative. On peut par conséquent définir une énergie potentielle électrique, qui dépend de la position des charges électriques, et appliquer la loi de conservation de l'énergie aux problèmes d'électricité. L'énergie potentielle électrique caractérise un ensemble de charges. En électricité, on préfère souvent travailler avec le potentiel électrique qui caractérise un point de l'espace, tout comme le champ électrique : le champ électrique donne la force de Coulomb par unité de charge en un point donné, le potentiel électrique est défini comme l'énergie potentielle par unité de charge.

1. Définition

L'énergie électrostatique W d'un système de charges, supposées initialement éloignées les unes des autres, correspond au travail qu'il faut fournir pour amener ces charges à leurs positions finales.

2. Energie potentielle d'une charge ponctuelle

Soit un champ $\vec{E}$(M) et V son potentiel associé, définis en tout point M de l'espace. On veut calculer l'énergie potentielle d'une charge q située en un point P. C'est, d'après la définition, la même chose que le travail d'un expérimentateur qui amènerait la charge en P, en partant d'un point initial. Comme l'énergie potentielle de gravitation, l'énergie potentielle électrostatique est définie à une constante près. On choisit l'énergie potentielle nulle à l'infini, l`a où il n'y a pas de charges (du moins dans la plupart des cas). C'est donc de l'infini que l'on va amener la charge q.

A tout instant, la charge est soumise à une force électrostatique $\vec{F}$ (M) = q$\vec{E}$ (M). On va supposer qu'un expérimentateur va faire se déplacer la charge en appliquant une force $\vec{F}_{\text{exp}}$ de telle sorte qu'elle compense la force électrostatique :

$$\vec{F}(M) + \overrightarrow{F_{exp}} = 0 \implies \overrightarrow{F_{exp}} = -\text{q}\vec{E}\ (\text{M})$$

Le travail de l'expérimentateur est alors la somme des travaux élémentaires de $\overrightarrow{F_{exp}}$ le long du chemin qui mène la charge de l'infini à P. Le travail élémentaire de $\overrightarrow{F_{exp}}$ est $dW_{\text{exp}} = \overrightarrow{F_{exp}} \cdot \overrightarrow{dl}$, où $\overrightarrow{dl}$ est un petit élément de longueur du chemin. Le travail total s'écrit :

$$W_{exp} = \int_{\infty}^{P} \vec{F}_{exp}\,\overrightarrow{dl} = \int_{\infty}^{P} (-q)\overrightarrow{E(M)}\,\overrightarrow{dl} = (-q)\int_{\infty}^{P} \overrightarrow{E(M)}\,\overrightarrow{dl}$$

On obtient, à une constante (-q) près, la circulation de $\vec{E}$ le long du chemin pris par la charge pour aller de l'infini à P.

Nous avons déjà fait le calcul de cette circulation, on trouve donc l'énergie potentielle électrostatique, en tenant compte du fait que le potentiel a été pris nul à l'infini :

$$E_p = W_{exp} = (-q)\big(V(\infty) - V(P)\big) = q(V(P) - 0)$$

Donc l'énergie potentielle électrostatique d'une charge q située en un point P dans un champ électrostatique dont le potentiel est V est :

$$\boxed{E_p = q.V(P)}$$

3. Energie potentielle d'un système de charges

Soit un ensemble de charges ponctuelles q_i placées en des points A_i. Calculons l'énergie potentielle du système de charges. Pour ce faire, nous allons le construire charge par charge.

<u>Première charge</u>

On suppose d'abord que les charges sont toutes à l'infini, et infiniment loin les unes des autres, elles n'interagissent pas entre elles. On apporte la charge q_1 à sa place en A_1. Il n'y a pas encore de champ extérieur, donc le travail de l'expérimentateur (l'énergie potentielle électrostatique) pour cette charge est :

$$\boxed{E_{p_1} = W_{exp} = q_1.V(A_1) = 0}$$

car le potentiel en A_1 est nul (pas de champ électrostatique pour l'instant...)

<u>Deuxième charge</u>

Si on amène maintenant la deuxième charge à sa place en A_2, on va faire le déplacement dans le champ créé par q_1, la première charge, qui est déjà à sa place. Le travail de l'expérimentateur, et donc l'énergie potentielle à ajouter, est alors :

$$E_{p_2} = W_{exp} = q_2.V_{1\to 2}(A_2) = q_2.\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

Bien entendu, l'expression serait la même si nous avions d'abord amène q_2 et ensuite q_1 à leurs places respectives. Pour simplifier l'expression finale, il convient de symétriser l'expression ci-dessus, c'est à dire :

$$E_{p_2} = \frac{1}{2}\left(q_1.\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + q_2.\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}\right) = \frac{1}{2}\left(q_1.V_{2\to 1}(A_1) + q_2.V_{1\to 2}(A_2)\right)$$

Si on appelle V_1 le potentiel créé par q_2 au point A_1 et V_2 le potentiel créé par q_1 au point A_2, on peut écrire cela

$$\boxed{E_{p_2} = \frac{1}{2}(q_1.V_1 + q_2.V_2)}$$

<u>Troisième charge et généralisation</u>

Supposons maintenant que l'on amène une troisième charge q_3 de l'infini à son point final A_3. Elle va voyager dans le champ créé par les deux premières charges. Le travail total fourni par l'expérimentateur pour la déplacer sera $E_{p3} = q_3.V(A_3)$ où $V(A_3)$ est le potentiel créé en A_3 par les deux charges q_1 et q_2.

Nous avons vu (théorème de superposition des potentiels) que les potentiels créés en un point M par des charges différentes se sommaient : $V(A_3) = V_{1\to3}(A_3) + V_{2\to3}(A_3)$. On peut donc écrire

$$\boxed{E_{p_3} = q_3.\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + q_3.\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}}$$

L'énergie potentielle totale, c'est à dire la somme de tous les travaux que l'expérimentateur a du fournir pour amener toutes les charges de l'infini, est la somme des travaux pour chacune des charges successives :

$$E_P = E_{p_1} + E_{p_2} + E_{p_3} = 0 + \frac{1}{2}(q_1.V_{2\to1} + q_2.V_{1\to2}) + q_3V_{1\to3} + q_3V_{2\to3}$$

On a noté ici $V_{i\to j}$ le potentiel créé en j par la charge q_i.

L'expression ci-dessus n'est pas suffisamment symétrique pour pouvoir la généraliser. Aussi, on va la rendre symétrique en remarquant que si l'on ne considère que deux charges, $r_{ij} = r_{ji}$ et

$$q_i.\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = q_j.\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{ji}} = q_i.V_{j\to i} = q_j.V_{i\to j}$$

On peut alors écrire

$$q_j.V_{i\to j} = \frac{1}{2}\left(q_j.V_{i\to j} + q_i.V_{j\to i}\right)$$

Ce qui permet d'écrire E_{p_3} et donc E_P :

$$E_P = \frac{1}{2}(q_1.V_{2\to1} + q_2.V_{1\to2}) + \frac{1}{2}(q_3V_{1\to3} + q_1V_{3\to1}) + \frac{1}{2}(q_3V_{2\to3} + q_2V_{3\to2})$$

En regroupant les termes selon la charge :

$$E_P = \frac{1}{2}(q_1.(V_{2\to1} + V_{3\to1}) + q_2(V_{1\to2} + \quad V_{3\to2}) + q_3(V_{2\to3} + V_{1\to3}))$$

Cette expression se généralise pour un nombre quelconque de charges :

L'énergie potentielle d'un ensemble de N charges q_i placées en A_i est

$$\boxed{E_P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i.V(A_i)}$$

Où $V(A_i)$ est le potentiel créé en A_i par toutes les charges autres que q_i.

Une charge ne crée pas de potentiel à l'endroit même où elle se trouve, ce potentiel serait infini...

Pour une distribution continue de charges, la généralisation de la formule précédente est évidente. Soit dq la charge située autour d'un point A quelconque de la distribution. L'énergie électrostatique de cette distribution s'écrit :

$$\boxed{E_P = \frac{1}{2}\int_{distribution} dqV(A)}$$

4. Energie électrostatique des conducteurs

4.1 Energie d'un conducteur unique

Pour un conducteur de capacité C portant une charge q, la relation intégrale de l'énergie potentielle s'intègre immédiatement, puisque le conducteur est équipotentiel (V=cte).

L'énergie emmagasinée s'écrit donc :

$$\boxed{E_P = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}$$

4.2 Energie d'un système à n conducteurs

On a alors : $E_P = \frac{1}{2}q_1V_1 + \frac{1}{2}q_2V_2 + \cdots + \frac{1}{2}q_nV_n$

$$\boxed{E_P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i.V_i}$$

Où q_i est la charge portée par le conducteur i et Vi son potentiel.

4.3 Energie d'un condensateur

Soit un condensateur constitué de deux armatures. L'énergie électrostatique de ce système de deux conducteurs est :

$$\boxed{E_P = \frac{1}{2} q_1 U^2 = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{{q_1}^2}{C}}$$

Où U= $V_1 - V_2$

5. Densité d'énergie électrostatique

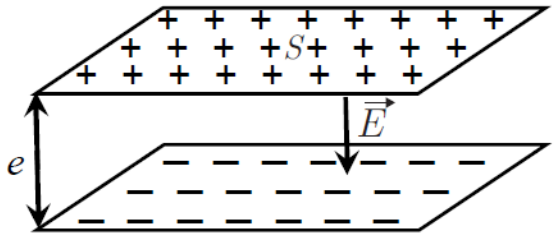
Considérons pour simplifier le cas d'un condensateur plan dont les armatures ont une surface S et sont distantes de e. Soit V la différence de potentiel appliquée entre ces armatures.

L'énergie emmagasinée dans ce condensateur est :

$E_P = \frac{1}{2} C V^2$

Et comme $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$ on a :

$E_P = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{e} V^2$



Par ailleurs, le champ électrique entre les armatures est uniforme. Sa norme est donnée par :

$$E = \frac{V}{e}$$

On peut donc écrire : $E_P = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S e$

On peut considérer que la densité d'énergie par unité de volume, qui est liée au champ électrique est également uniforme. Elle a pour expression :

$$w = \frac{dE_P}{dv} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Puisque le volume du condensateur est v = Se.

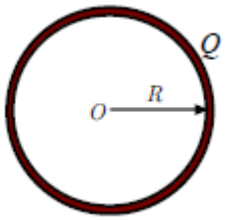
Ce résultat, établi ici dans un cas particulier, est vrai dans le cas général : si un champ électrique est appliqué en un point quelconque de l'espace, on peut lui associer une densité volumique d'énergie donnée par :

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Exemple d'application : énergie d'une sphère conductrice chargée

On considère une sphère de rayon R est conductrice est en équilibre, elle ne peut être chargée qu'en surface.

Soit Q la charge portée par cette sphère, et C sa capacité.



Son énergie est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Et, comme $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ on a donc :

$$E_P = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Chapitre 5 :

Lois Fondamentales d'Electrocinétique

Chapitre 5 :

Lois Fondamentales d'Electrocinétique

L'électrocinétique étudie la circulation des courants électriques dans les circuits électriques composés d'un ensemble d'éléments appelés composants comme les générateurs (piles, …), les composants passifs (résistance, bobine d'induction, condensateur) et les composants actifs (transistor, amplificateur opérationnel, …). Ces éléments sont reliés entre eux par des fils conducteurs.

1. Matériaux en électricité

Les électrons se déplacent dans les solides plus ou moins facilement selon le matériau. La charge d'un électron est égale à $1{,}6.10^{-19}$ Coulomb. On distingue 3 types de matériaux :

- ✓ ***Les conducteurs*** : matériaux dans lesquels un champ très faible suffit à fournir une énergie permettant le déplacement des électrons libres (porteurs de charges arrachés à chaque atome). On a un à deux électrons libres en moyenne par atome. La concentration en électrons dépend du matériau ; par exemple pour le cuivre, on a 10^{28} électrons par m^3.
- ✓ ***Les isolants*** : pas d'électron libre. La qualité de l'isolant dépend de la pureté du matériau
- ✓ ***Les semi-conducteurs*** : la concentration en électrons dépend du matériau et de la température. Les électrons sont disposés dans des bandes permises séparées par des bandes dites interdites. Une certaine quantité d'énergie permet de faire passer des électrons d'une bande permise pleine (bande de valence) vers la bande vide (bande de conduction) générant ainsi des trous électriquement équivalents à des charges positives dans la bande de valence. Les semi-conducteurs sont utilisés dans la plupart des circuits actifs.

2. Courant électrique

2.1 Notion de courant

Un conducteur est un matériau contenant des charges libres capables de se déplacer. Dans les électrolytes les charges mobiles sont des ions. Dans les autres conducteurs, les charges sont des électrons. Un **courant électrique** existe quand une **charge** q est transférée d'un point à un autre du conducteur. **L'intensité du courant**, à l'instant t, est représentée par le débit des charges

$$\boxed{I(ampère) = \frac{dQ(Coulomb)}{dt(seconde)}}$$

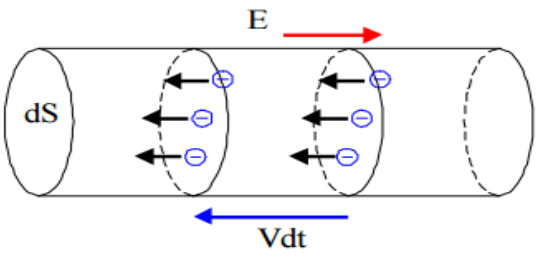
Pour des raisons historiques, le sens conventionnel d'un courant positif est celui du dépla-

cement de charges positives. Il est donc opposé à la direction de déplacements des électrons.

2.2 Vecteur densité de courant

Le courant peut s'exprimer en fonction de la vitesse des charges mobiles. On considère un conducteur de section dS. Soit n le nombre de charges mobiles par unité de volume et $\vec{v}$ leur vitesse. Pendant la durée dt, la charge dQ qui traverse la section dS est égale à :

$$dQ = n.e.\vec{v}.dt.\overrightarrow{dS} = \rho.\vec{v}.dt.\overrightarrow{dS}$$



On définit le **vecteur densité de courant** par : $\boxed{\vec{j} = \rho.\vec{v}}$

L'intensité du courant à travers un conducteur de section totale A s'écrit donc :

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt} = \int_{(A)} \vec{j}\overrightarrow{dS}}$$

3. Conductivité électrique : Loi d'ohm locale

Il s'agit d'exprimer la densité de courant $\vec{j}$ dans un conducteur, en fonction du champ appliqué $\vec{E}$,en partant tout simplement du principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de charge q et de masse m.

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = q\vec{E} \rightarrow \vec{V} = \frac{q}{m}\vec{E}t + \overrightarrow{V_0}$$

Visiblement, cette vitesse tend vers l'infini au cours du temps, ce qui ne peut être satisfaisant. La solution consiste à envisager les **chocs** multiples que subit la charge q dans son mouvement, notamment sur les atomes du réseau cristallin.

Tout d'abord, la vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ étant aléatoire, sa valeur moyenne $\overrightarrow{v_0}$ est nulle. En désignant par τ le temps moyen séparant deux chocs successifs, la vitesse de dérive s'écrit :

$$\vec{v} = \frac{q\vec{E}}{m}\tau$$

On en déduit :

$$\vec{J} = \rho\vec{v} = \frac{n\tau q^2}{m}\vec{E}$$

Puisque $\rho = nq$ où n est le nombre de charges par unité de volume.

La relation cherchée s'écrit :

$$\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}}$$

Où :

$$\boxed{\sigma = \frac{n\tau q^2}{m}}$$

σ est la **conductivité électrique** du matériau, elle s'exprime en **siemens par mètre (S/m).**

La loi $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ constitue la loi d'ohm locale, valable en tout point du conducteur.

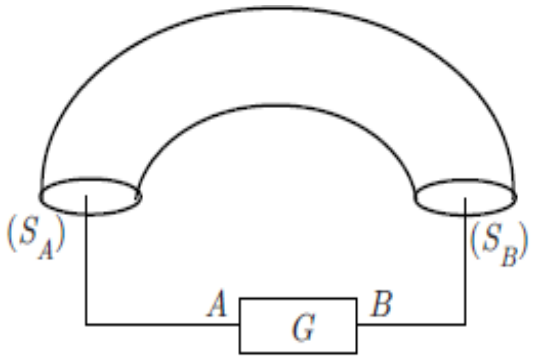
La résistivité ρ est définie comme l'inverse de la conductivité :

$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{n|q\mu|}$ elle s'exprime en Ω.m

4. Résistance électrique : Loi d'ohm Macroscopique

Considérons un conducteur limité par deux sections (S_A) et (S_B), portées respectivement V_A et V_B, grâce à un générateur (G) fermant le circuit.

On peut écrire :



$$V_A - V_B = \int_{\widehat{AB}} \vec{E}.\vec{dl} = \int_{\widehat{AB}} \frac{\vec{J}}{\sigma}.\vec{dl}$$

En régime stationnaire on peut définir la densité de courant en un point comme :

$$j = \frac{I}{S}$$

Où I est l'intensité du courant et S l'aire de la section droite du conducteur en ce point.

On a donc :

$$V_A - V_B = \frac{I}{\sigma}\int_{\widehat{AB}} \frac{dl}{S}$$

En introduisant la résistance R du conducteur donnée par :

$$R = \frac{1}{\sigma}\int_{\widehat{AB}} \frac{dl}{S}$$

Qui s'exprime en ohms (Ω) on obtient la loi d'ohm macroscopique :

$$\boxed{V_A - V_B = R.I}$$

- ✓ Si $V_A > V_B$, I entre par A et sort par B ; on écrit : $V_{AB} = RI$
- ✓ Si $V_A < V_B$, I entre par B et sort par A ; on écrit : $V_{AB} = -RI$

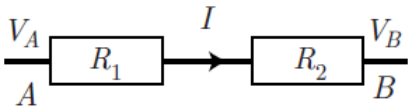
5. Association de résistances

5.1 Résistances en série

On a :

$V_A - V_B = R_1.I + R_2.I = (R_1 + R_2).I$

Résistance équivalente: R= $R_1 + R_2$



Pour n résistances en séries, on a :

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

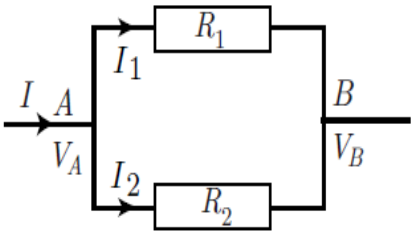
5.2 Résistances en parallèle

On a :

$V_A - V_B = R_1.I_1 = R_2.I_2 = (I_1 + I_2).R$

Par conséquent :

$\frac{R}{R_1} = \frac{I_1}{I_1+I_2}$ et $\frac{R}{R_2} = \frac{I_2}{I_1+I_2}$



Pour n résistances en parallèle, on a :

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

6. Energie et puissance d'un générateur

6.1 Définition

Un générateur est un dipôle qui transforme une forme d'énergie (chimique, mécanique, lumineuse) en énergie électrique. Il est caractérisé par sa force électromotrice E et sa résistance interne r.

6.2 Loi d'Ohm d'un générateur

6.2.1 Générateur en circuit ouvert

En circuit ouvert les porteurs de charges sont immobiles. Dans ce cas la d.d.p aux bornes du générateur correspond à la circulation du champ électromoteur produit par le générateur :

$$V_p - V_N = \int_N^P -\overrightarrow{E_m}.\overrightarrow{dl} = e$$

Où e est la force électromotrice du générateur (f.e.m) , noté e ou E.

6.2.2 Générateur fermé sur un circuit

En régime permanent, à l'intérieur du générateur les charges ont une vitesse V = cte r → apparition de forces de frottement → apparition d'une résistance qui caractérise ce frottement : c'est la résistance interne du générateur notée r.

→ provoque une chute de tension aux bornes du générateur par rapport à sa valeur a vide.

Loi d'Ohm pour un générateur : $\boxed{V_p - V_N = e - rI}$

r I chute ohmique de tension à l'intérieur du générateur.

6.3 Interprétation énergétique

- Energie cédée par le générateur au circuit extérieur :

$$W_{c=}q.U = q.(E - rI) = I.t(E - rI) = E.I.t - rI^2.t$$

- Energie totale cédée par le générateur : W_t = E.I.t

- r I^2.t chaleur perdue par effet joule dans le générateur.

- Puissance cédée par le générateur au circuit extérieur : $P = \frac{W_c}{t}$ = E.I – r.I^2

- Rendement du générateur : $\rho = \frac{W_c}{W_t} = \frac{E.I.t - rI^2.t}{\text{E.I.t}} = 1 - \frac{r.I}{E}$

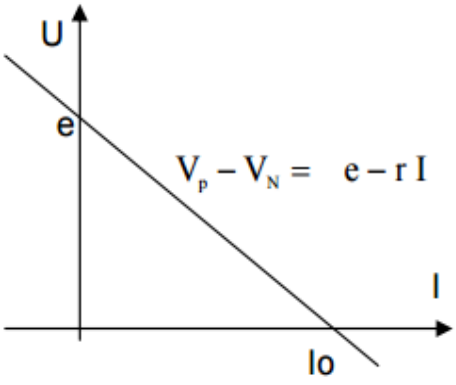
6.4 Caractéristique du générateur

La caractéristique d'un dipôle est la courbe représentative de : U=f(I). Pour le générateur c'est une droite affine.

U_0 tension à vide obtenue pour I = 0

→ U_0=e

I_o courant de court circuit obtenu pour U= 0
→ I_o = e/r



7. Energie et puissance d'un récepteur

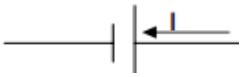
7.1 Définition

Un récepteur est un dipôle qui transforme l'énergie électrique qu'il reçoit en une autre forme d'énergie (chimique, mécanique …). Il est caractérisé par sa force contre-électromotrice E' et sa résistance interne r'.

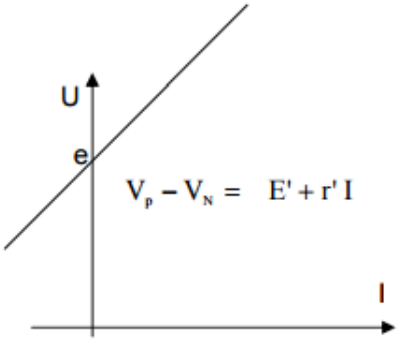
7.2 Loi d'Ohm d'un récepteur

- Loi d'ohm pour un récepteur : Le courant doit entrer par sa borne positive.

U = E'+r'.I



E' force contre électromotrice du récepteur



- Energie électrique reçue par le récepteur :

$W_r = q.\ U = q\ (E' + r'\ I) = I.t\ (E' + r'\ I) = E'.I.t + r'\ I^2.t$

- Energie utile du récepteur : C'est l'énergie stockée par le récepteur et qui peut être converti en énergie mécanique ou chimique : $W_u = E'.I.t$

- Puissance reçue par le récepteur :

$P = \frac{W_r}{t} = E'.I - r'.I^2$

- Rendement du récepteur :

$$\rho = \frac{W_c}{W_r} = \frac{E'.I.t}{E'.I.t + r'.I^2.t} = \frac{E'}{E' + r'I}$$

Exemples de récepteurs :

Moteurs : même principe que la dynamo mais utilisée en sens inverse : les spires du rotor, branchées sur un générateur extérieur, sont parcouru par I et se trouvent dans le champ magnétique crée par le stator, elles seront soumises à des forces (de Laplace) qui font tourner le rotor.

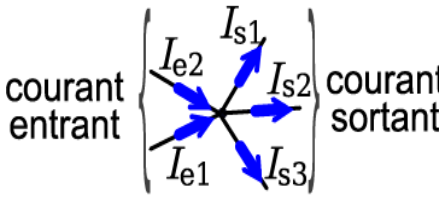
Electrolyseurs : Le passage de courant électrique dans des électrolytes crée une réaction chimique. Le champ crée à l'intérieur de l'électrolyte permet la décomposition des composés ioniques.

8. Lois de Kirchhoff

8.1 Première loi de Kirchhoff : la loi des nœuds

Cette loi découle directement de la conservation de la charge électrique. En particulier, les charges électriques ne peuvent pas s'accumuler à un endroit quelconque du circuit. Les charges qui arrivent à un nœud compensent celles qui en repartent :

$$\boxed{\sum_{entran} i_e(t) = \sum_{sortant} i_s(t)}$$

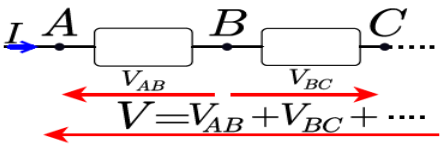


8.2 Deuxième loi de Kirchhoff : les lois des branches et des mailles

La loi des branches

Toutes les tensions $V_k(t)$ situées sur une même branche peuvent se simplifier par leurs sommes algébriques V (t) :

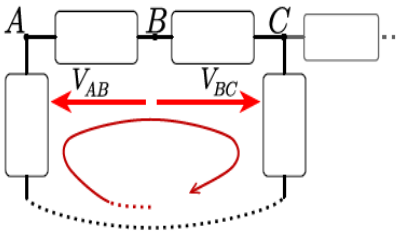
$$\boxed{V(t) = \sum_{k\epsilon branche} V_k(t)}$$



La loi des mailles

La loi des mailles découle de l'additivité des différences de potentiel entre deux points (c.-à-d. la loi des branches). Dans une maille quelconque d'un réseau électrique la somme algébrique des différences de potentiel le long de la maille est constamment nulle :

$$\boxed{\sum_{k\epsilon maille} V_k(t) = 0}$$



8.3 Méthode d'utilisation des lois de Kirchhoff

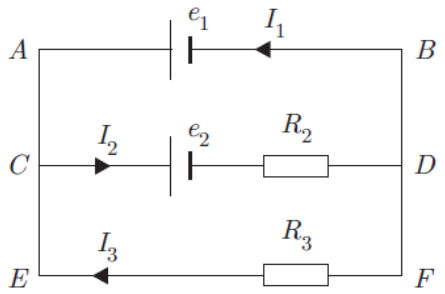
• Orienter arbitrairement les mailles ;
• Nommer et orienter les différentes tensions et intensités en tenant compte directement de la loi des noeuds et en commençant par les inconnues ;
• Dénombrer les intensités inconnues et écrire autant de lois des mailles que d'inconnues ;

• Remplacer les tensions de chaque maille par leurs expressions en fonctions des données du problème.
• Résoudre le système d'équations.

Exemple : Calcul de courants dans un réseau

On considère le circuit de la figure ci contre.

Déterminer les courants I1, I2 et I3 respectivement dans les branches AB, CD et EF.



On se donne arbitrairement les sens de courant indiqués sur la figure.

Loi des nœuds en C : $I_2 = I_1 + I_3$

Maille CDFEC : $e_2 + R_2I_2 + R_3I_3 = 0$

Maille CDBAC : $-e_2 - R_2I_2 + e_1 = 0$

La resolution de ce système donne :

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)e_1 - R_3e_2}{R_2R_3}$$

$$I_2 = \frac{e_1 - e_2}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{-e_1}{R_3}$$

9. Théorème de Thévenin

Le théorème de Thévenin permet de transformer un circuit constitué de plusieurs mailles de plusieurs sources de tension et de plusieurs sources de courant en un circuit à une maille constituée d'une résistance équivalente (R_{th} résistance de Thévenin), d'une source de tension équivalente (V_{th} tension de Thévenin).

Calcul de la tension de Thévenin :

Pour calculer la tension de Thévenin d'un circuit, on retire mentalement la résistance de charge et on calcule la tension aux bornes de R_L

Dans le cas d'un montage, il suffit de retirer la résistance de charge (R_L) et de placer un voltmètre en lieu et place de R_L. On mesure ainsi **la tension de Thévenin** qui correspond à la**tension à vide** du montage.

Attention à ce que la valeur de R_L soit très inférieure à l'impédance d'entrée du voltmètre. Pour information, l'impédance d'entrée d'un voltmètre est de l'ordre du MΩ.

Calcul de la résistance de Thévenin :

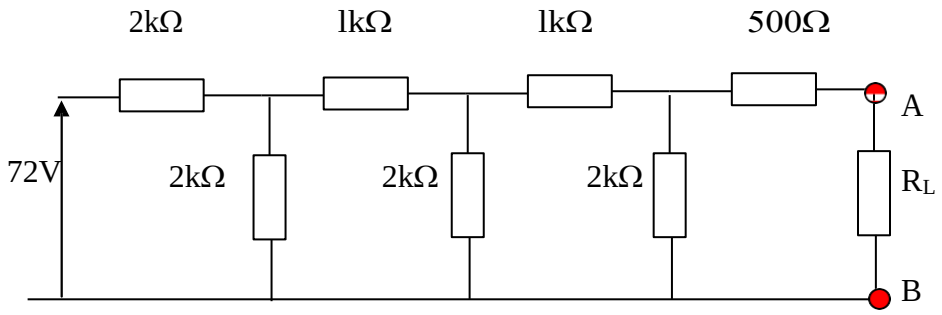
Pour calculer la résistance de Thévenin il faut retirer :

- les sources de courant et les remplacer par des circuits ouverts
- les sources de tension et les remplacer par des courts-circuits.
- La résistance de charge R_L

Reste à calculer la résistance équivalente du montage, c'est la résistance de Thévenin (R_{th}). S'il s'agit d'un montage, à l'aide d'un ohm-mètre on mesure la résistance vue par la résistance de charge.

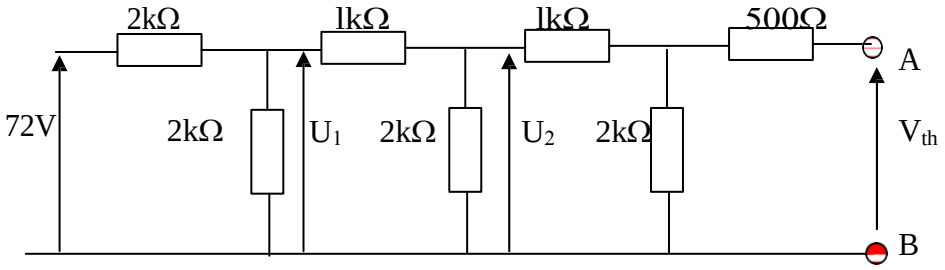
Exemple :

Soit le montage suivant :

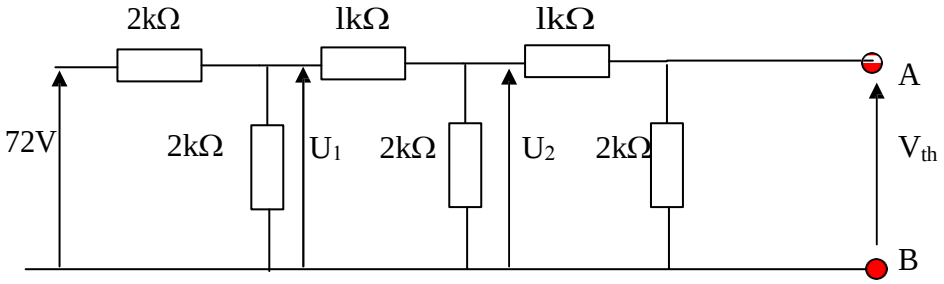


Calcul de la tension de Thévenin

On retire la résistance de charge, nous avons le circuit suivant :

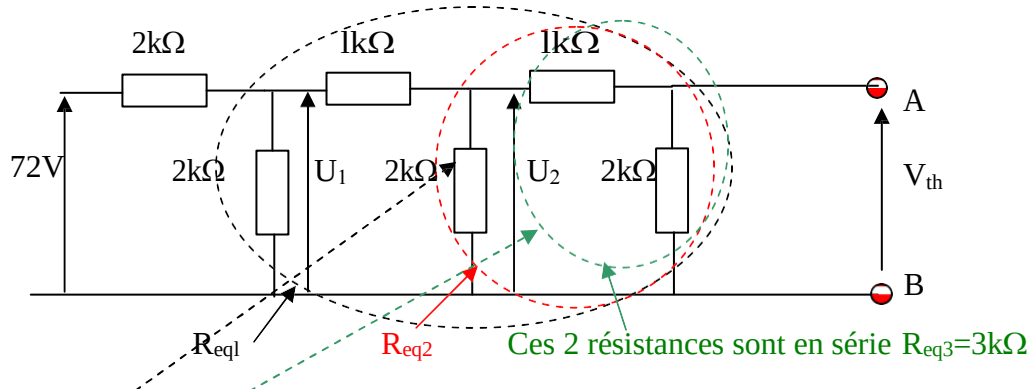


L'impédance du voltmètre est grande devant les 500Ω. Par conséquent le schéma devient :



Avant de calculer V_{th}, calculons U_1 puis U_2

U1 :



$$R_{eq2} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right]^{-1} = 1.2k\Omega$$

$$R_{eq1} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1+R_{eq2}}\right]^{-1} \text{ soit } R_{eq1} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2}\right]^{-1} = 1.04762k\Omega$$

Nous avons $U_1 = \frac{R_{eq1}}{2+R_{eq1}} \times 72$ soit $U_1 = \frac{1.047622}{+1.04762} \times 72 = 24.75V$

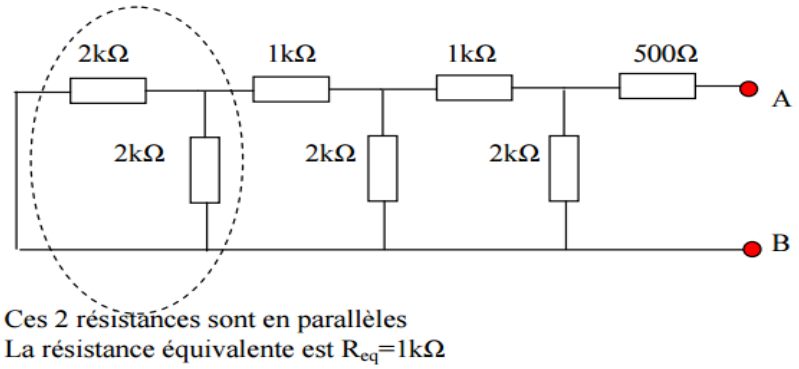
De la même façon, nous avons $U_2 = \frac{R_{eq2}}{1+R_{eq2}} . U_1$ soit U_2=13.5 V

Nous pouvons calculer la tension de thévenin

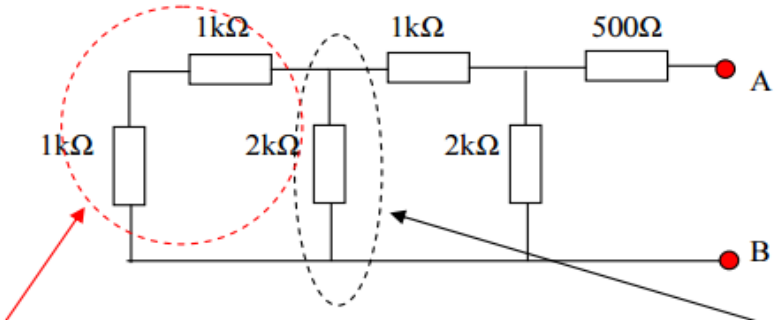
$V_{th} = U_2.\frac{2}{1+2} = 9V$

Calcul de la résistance de thévenin

On remplace la source de tension (72V) par un court circuit et on retire la résistance de charge R_L. Nous avons le circuit suivant :

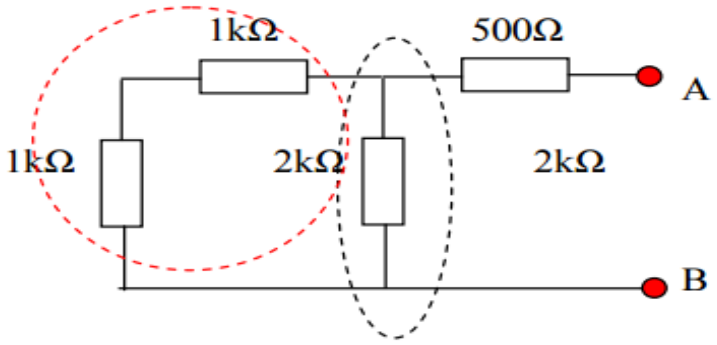


Le schéma devient :



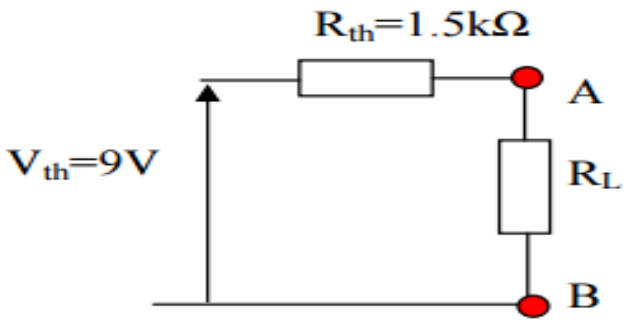
Les 2 résistances de 1 KΩ sont en séries l'une par rapport à l'autre. Nous avons une résistance équivalente de 2 KΩ. Cette résistance équivalente est en parallèle avec la résistance de 2 KΩ. La résistance équivalente est de 1 KΩ.

Le schéma devient :



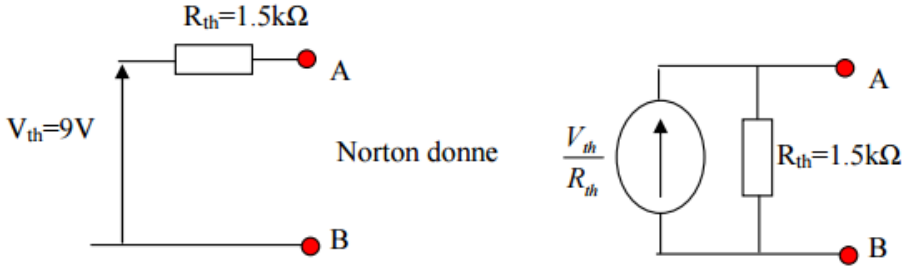
Donc la résistance de Thévenin est de 1+0.5 soit 1.5 KΩ.

Le schéma équivalent de notre circuit est :



10. Théorème de Norton

Le théorème de Norton est dérivé du théorème de Thévenin



On remarque que la résistance de Norton est identique à celle de thévenin.

Enfin on remplace la source de tension de Thévenin par une source de courant pure de Norton.

Cette source de courant délivre un courant I tel que :

$$\boxed{I = \frac{V_{th}}{R_{th}}}$$

Exercices avec Solutions

Exercices avec Solutions

Exercice 1

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, on suppose que celui-ci est constitué d'un électron, de masse m_e et portant une charge $-e$, qui tourne, sur une trajectoire circulaire de rayon r, autour d'un noyau assimilé à un objet ponctuel. Le noyau de l'atome d'hydrogène ne comporte qu'un proton.
Calculer le rapport des deux forces qui interviennent dans ce mouvement : La force électrostatique F_E et la force de gravitation F_G, on donne :
La charge électrique du proton est + e et sa masse mp = $1{,}67\times10^{-27}$ kg,
$e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C, me = $9{,}11\times10^{-31}$ kg, $r = 5{,}3\times10^{-11}$ m

Solution

Calculons les modules des deux forces d'interaction qui interviennent ici :

$$F_E = K\frac{e^2}{r^2} = 8{,}2.\,10^{-8}N$$

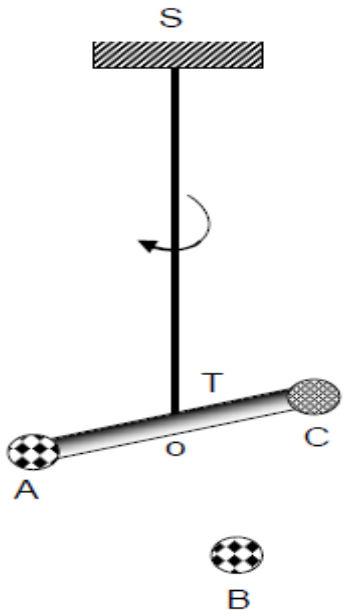
$$F_G = G\frac{m_e m_p}{r^2} = 3{,}6.\,10^{-47}N$$

Le rapport de ces deux forces : $\frac{F_E}{F_G} = 0{,}23.\,10^{40}$ est très grand

Par conséquent dans tous les problèmes d'électricité les interactions gravitationnelles seront négligées devant les forces d'origine électromagnétique. Par contre à grande échelle, en astronomie, seules les forces de gravitation interviennent. La matière comporte autant de charges positives que de charges négatives et, à cette échelle, la résultante des forces électrostatiques est nulle.

Exercice 2

Le pendule de torsion, qui est représenté sur la figure et qui constitue l'élément principal de la balance de Coulomb, comporte une tige T, isolante, horizontale, très légère, munie, à une extrémité, d'une petite sphère métallique A et à l'autre extrémité d'un contrepoids isolant C. Sa longueur est l = 20 cm. Elle est suspendue en son milieu O à un support S fixe, par un fil métallique de longueur L et de constante de torsion C = 12.10^{-7} N.m/rad. La boule A, complètement déchargée, se trouve initialement en un point correspondant à un angle de torsion nul ($\alpha = 0$). Le système est en équilibre.



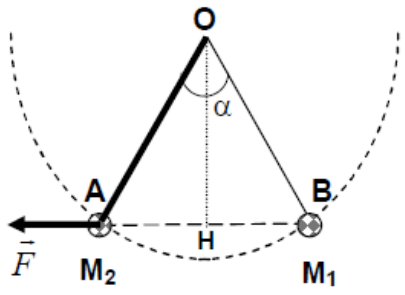
On met A en contact avec une boule B identique à A et portant une charge + Q. Il en résulte une électrisation de A qui tourne d'un angle α = 60° par rapport à sa position initiale. Le système atteint, alors, une seconde position d'équilibre. Calculer la valeur de la charge Q.

Solution

Initialement la boule A est déchargée et la boule B porte une charge +Q. Après le contact, les deux boules étant identiques, chacune d'elles va prendre une charge : $q = \frac{Q}{2}$
Appelons M_1 la position initiale de la boule A et M_2 sa nouvelle position lorsque le système atteint son équilibre après avoir tourné d'un angle α.

La figure ci-contre correspond à la 2ème position d'équilibre du pendule. Le moment M de la force $\vec{F}$, par rapport àl'axe de rotation Δ, est équilibré par le couple de torsion :
ω = Cα du fil. La force de Coulomb a pour expression :

$$F = 9.10^9 \frac{q^2}{d^2} = 9.10^9 \frac{q^2}{l^2 sin^2 \frac{\propto}{2}}$$



Calcul du moment M ; M = F.OH = $F.\frac{l}{2}.cos\frac{\propto}{2} = 9.10^9 \frac{q^2}{l^2 sin^2\frac{\propto}{2}} cos\frac{\propto}{2}$

A l'équilibre M = ω d'où :

$$Q = 2q = 2\sqrt{\frac{C \propto}{9.10^9} \frac{2l sin^2 \frac{\propto}{2}}{cos\frac{\propto}{2}}} = 8.10^{-9} C$$

Exercice 3

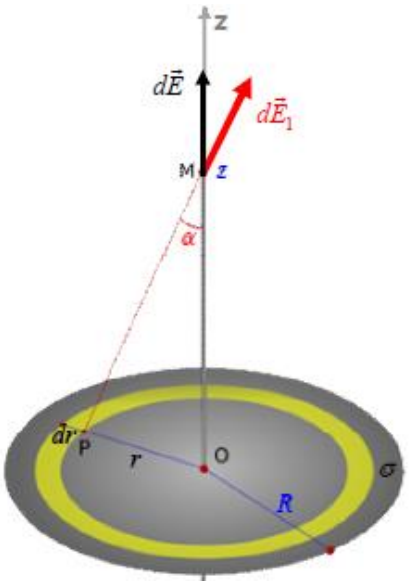
Calculer le champ et le potentiel créés par une charge Q, portée par un disque plein de faible épaisseur, en un point M sur l'axe oz. La charge est uniformément répartie sur le disque. Soit Q = σ S où σ représente la densité de charge superficielle et S = π R^2 la surface du disque.

Solution

Calcul du champ électrique :
On calcule le champ par la méthode directe en un point M d'ordonnée z :
Prenons un élément de charge dQ= σdS sur le disque, il crée au point M un élément de champ électrique :

$$\overrightarrow{dE_1} = \frac{KdQ}{PM^2}\vec{u}$$

Tout plan contenant (oz) est plan de symétrie de la distribution, donc pour tout point M de (oz), le champ électrique total $\vec{E}$(M) est porté par l'axe (oz).
Un bon choix de l'élément de surface peut simplifier considérablement le calcul du champ électrique créé par tout le disque.
On utilise, dans ce cas, comme élément de surface une couronne élémentaire de rayon r, d'épaisseur dr (figure).



La surface de cette couronne est:
dS =2πr dr

Le champ électrique, créé par cette couronne élémentaire de charge, est, pour des raisons de symétrie, porté par l'axe oz. En un point M de oz on a :

$$dE = \frac{K\sigma dS}{PM^2} cos\alpha$$

et le champ électrique total au point M créé par le disque est E(M)= $\int dE$

Afin de prendre en compte toute la surface chargée du disque, on intègre suivant le rayon r entre 0 et R. Pour cela, on exprime tout en fonction de cette variable r :
Comme :

$$cos\alpha = \frac{z}{PM} \; et \; PM^2 = z^2 + r^2$$

le champ total devient :

$$E = 2\pi K\sigma z \int_0^R \frac{rdr}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\right]_0^R$$

Avec le changement de variable u= $z^2 + r^2$ et du du= 2rdr , on obtient :

E(z)= $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\right]_0^R$ ou encore $E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]$

Pour z > 0 on a $E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]$

Pour z < 0 on a $E(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]$

<u>Calcul du potentiel électrique</u> :

En utilisant la circulation du champ électrique le long de la ligne de champ (oz), nous avons :

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -Edz \;\; \rightarrow \;\; V = -\int E(z)dz$$

Pour z > 0 et en utilisant l'expression l'expression du champ E(z) avec le changement de variable u= $z^2 + r^2$ et du du= 2rdr , on obtient :

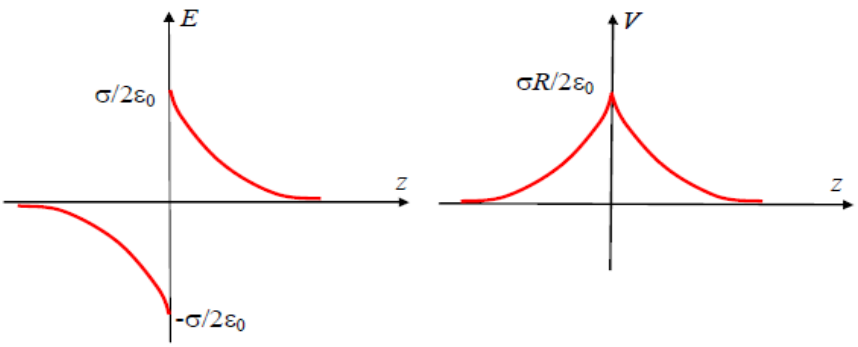
$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - z\right] + C$$

De la même manière pour z < 0, on a :

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2 + R^2} + z\right] + C$$

Le calcul de la constante se fait en supposant que lorsque z → ∞ on a V=0 et C= 0

On peut noter la continuité, au point z = 0, du potentiel et la discontinuité du champ.

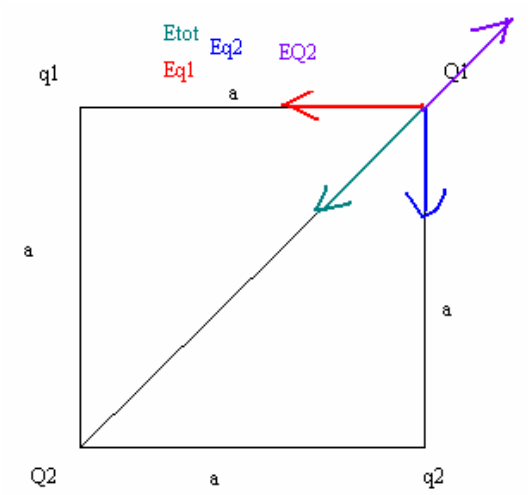


<u>Exercice 4</u>

Une charge Q est placée au deux coins opposés d'un carré ; une charge q est placée aux deux autres coins. Si la résultante de la force électrique agissant sur Q est nulle, comment Q et q sont-ils liés ?

<u>Solution</u>

Représentons le problème pour y voir plus clair :



La demi-droite Q_1, Q_2 a une longueur de $a \cdot \sqrt{2}$. Notons ce que nous savons déjà :

Q_1 et Q_2 ont même charge $\Rightarrow$ se repoussent (de même pour q_1 et q_2)

$$\|\vec{E}q_1\| = \|\vec{E}q_2\|$$

$$\|\vec{E}q_{tot}\| = \left(\|Eq_1\| + \|\vec{E}q_2\|\right) \cdot \cos(45) \qquad (1)$$

$$\|Eq_{tot}\| = -\|EQ_2\| \qquad (2)$$

Egalisons (1) et (2) :

$$-\|EQ_2\| = \left(\|Eq_1\| + \|Eq_2\|\right) \cdot \cos(45) \qquad (3)$$

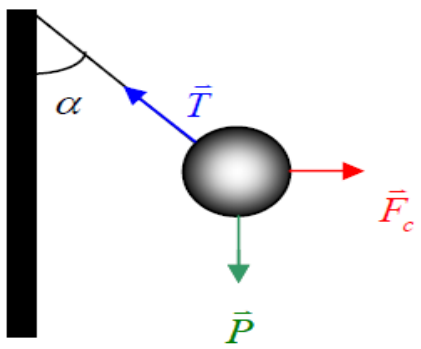
Or,

$$q_1 = q_2 \quad (4) \qquad \text{et} \qquad Q_1 = Q_2 \qquad (5)$$

D'où $Q = -q.\sqrt{2}$

<u>Exercice 5</u>

Une sphère de masse égale à 0.1 [g] et portant une charge 3. 10^{-10} [Cb] est attachée à l'extrémité d'un fil de soie de 5 [cm] de long. L'autre extrémité du fil est attachée à une grande plaque non conductrice verticale dont la densité surfacique de charge vaut 25. 10^{-6} [Cb/m²].



Déterminer l'angle que fait le fil avec la verticale.

Solution

Par les lois de Newtons, nous savons que (l'accélération est nulle, vu que la boule est en équilibre) :

$$T.sin\alpha = F_c$$

$$T.cos\alpha = P$$

Nous en déduisons que :

$$P.tan\alpha = F_c$$

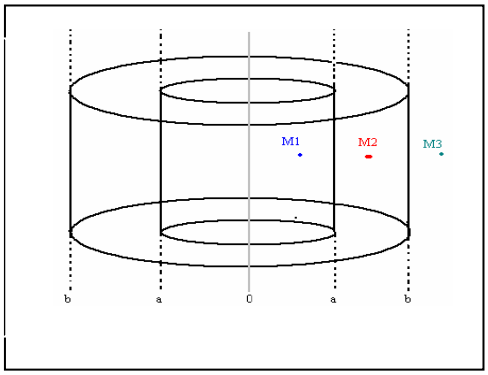
Où F_c=q.E

Donc **α=23º**

Exercice 6

Deux surfaces cylindriques métalliques infinies et coaxiales de rayon **a** et **b** portent respectivement une charge **–λ** et **+λ** par unité de longueur.

- Calculer le champ créé en un point quelconque M.



Solution

Pour que le point soit vraiment quelconque, nous devons le considéré à trois endroits différents (les trois cas possibles où le champs est différent).

Pour ce qui est de M_1 :
Il se trouve sous la surface fermée a → suivant le théorème de Gauss :

$$\oint \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = EdS$$

Choisissons un cylindre d'axe O et de rayon M1, de hauteur h. Il n'y a aucune charge à l'intérieur et donc :

E(M1) = 0

Pour ce qui est de M2 :

Il se trouve entre les deux cylindres dont les rayons sont respectivement a et b.

Choisissons un cylindre d'axe O et de rayon M2, de hauteur h

Dans ce cas, nous avons :

$$\oint \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \leftrightarrow E(M2).2\pi.r.h = \frac{-\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E(M2) = \frac{-\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

Pour ce qui est de : *M3*

Choisissons un cylindre d'axe *O* et de rayon *M3*, de hauteur h:

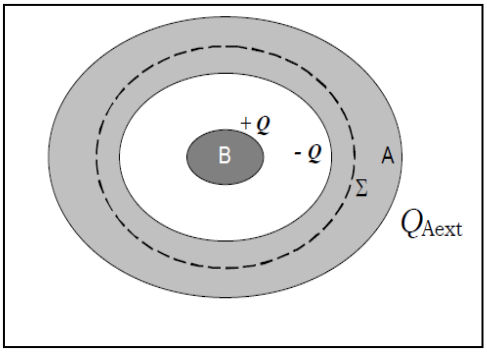
$$\oint \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$$

$$E(M2) = 0$$

<u>Exercice 7</u>

1. En utilisant le théorème de Gauss, établir une relation qui existe entre Q_{Aint} et Q_B
2. Calculer la charge extérieure Q_{Aext} dans les cas suivants :

   a. Le conducteur A est isolé et initialement neutre.
   b. Le conducteur A porte une charge initiale q.



<u>Solution</u>

1°) On applique le théorème de Gauss en considérant une surface $\sum$ à l'intérieur du conducteur A. Sachant que le champ est nul à l'intérieur du conducteur A (équilibre électrostatique) on a :

$$\emptyset = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{E_{int}}\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_B + Q_{Aint}}{\varepsilon_0} = 0$$

Donc $Q_B = -Q_{Aint}$

2°) a) Cas où le conducteur A est initialement neutre:

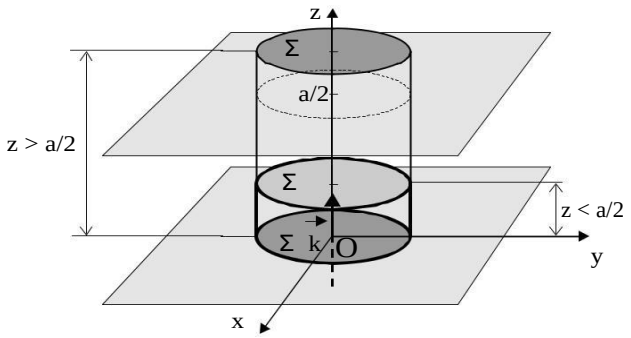
$$Q_{Aext} + Q_{Aint} = 0 \rightarrow \quad Q_{Aext} = -Q_{Aint} = Q_B$$

b) Cas où le conducteur A porte initialement une charge q :

$$Q_{Aext} + Q_{Aint} = q \;\rightarrow\; Q_{Aext} = q - Q_{Aint} = q + Q_B$$

Exercice 8

On considère dans un repère $(Oxyz)$, une distribution de charges électriques de densité volumique uniforme ρ, répartie entre deux plans infinis parallèles au plan $[xOy]$ et situés respectivement aux cotes $z = -a/2$ et $z = +a/2$. En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ et le potentiel électriques en tout point ; on prendra le potentiel nul dans le plan $[xOy]$. Représenter graphiquement les variations de ces deux grandeurs.



Solution

De l'analyse de la symétrie de la répartition des charges, il résulte que $E = E(z)\,k$ avec une symétrie miroir par rapport au plan $[xOy]$ et qu'en conséquence :

. dans le plan $[xOy]$, $E(z) = 0$ (puisque E doit y être à la fois orthogonal et confondu),

. il suffit d'étudier $E(z)$ pour $z > 0$ (ou $z < 0$).

Surface de Gauss (S) *:* un tronc de cylindre de longueur z, dont l'axe est orthogonal au plan $[xOy]$, et fermé par deux surfaces circulaires Σ parallèles au plan $[xOy]$, de cotes respectives $z = 0$ et $z > 0$.

1/ Envisageons le cas où la longueur de (S) est $z \leq +a/2$.

$$\Phi = \iint_{\Sigma\,à\,z} \vec{E}\,.\,\vec{N}\,d^2S = E(z) \times \iint_{\Sigma\,à\,z} d^2S = E(z) \times \Sigma = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$$

avec $Q_{int} = \rho \times \Sigma \times z$ (pour $\rho > 0$ ou $\rho < 0$). D'où il vient que $E(z) = \dfrac{\rho z}{\;}$. On a donc, pour tout

ε_o

$\vec{\quad} \quad \rho z \quad \vec{\quad}$

$0 \le z \le +a/2 : E = \dfrac{}{\varepsilon_o} \quad k$,

et comme Σ est aussi grand que l'on veut, E est bien le champ créé, à la cote z, par toute la charge.

Du fait de la symétrie miroir par rapport au plan $[xOy]$, on voit immédiatement que cette relation est

aussi utilisable pour tout $-a/2 \le z \le 0$.

Le potentiel :

on a pour tout $-a/2 \le z \le +a/2$:

$$dV = -\frac{}{\varepsilon_0} k.\left(dx\, i + dy\, j + dz\, k\right) = -\frac{}{\varepsilon_0} dz \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{}{2\varepsilon_0} + V_o$$

avec la constante arbitraire $V_o = 0$ puisque le potentiel est nul pour $z = 0$ par hypothèse.

Notons qu'aux limites $z = \pm a/2$, on a $V = -\dfrac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$.

2/ Etudions, maintenant, le cas où la longueur z de (S) est $z \ge +a/2$. Seule change la charge Q_{int}

qui prend alors sa valeur maximum $\rho \times \Sigma \times \dfrac{a}{2}$; pour $\rho > 0$ ou $\rho < 0$ le champ (assimilable à celui

créé par toute la charge) est donc :

$$\vec{\quad} \quad \rho a \quad \vec{\quad}$$

$$E = \frac{}{2\varepsilon_o} k$$

Dans cette gamme de valeurs de z, on a, alors : $dV = -\dfrac{\rho a}{\quad} dz \quad \Rightarrow \quad V = -\dfrac{\rho a}{\quad} z + V_o$

$2\varepsilon_o$ $2\varepsilon_o$

Or, comme $V = -\dfrac{\rho a^2}{8\varepsilon_o}$ en $z = +a/2$, la constante arbitraire est

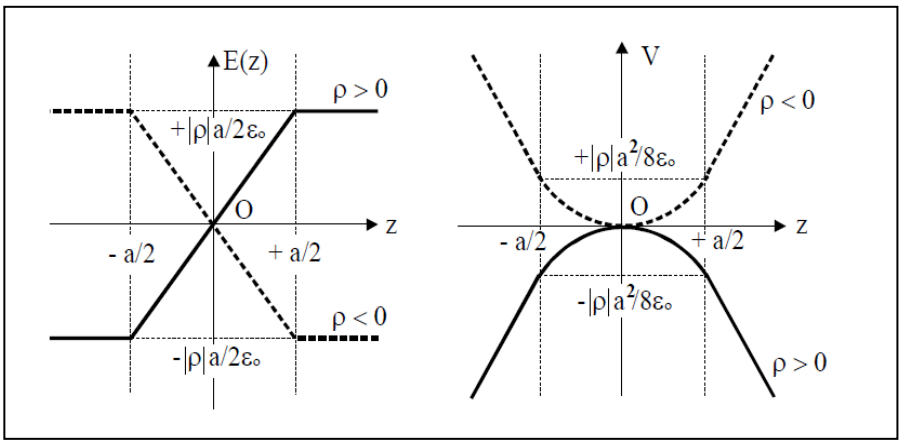
$$\Rightarrow V = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_o} z + \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_o}$$

En raison de la symétrie miroir par rapport au plan $[xOy]$, le champ électrique doit s'écrire pour tout

$z \leq -a/2$: $\vec{E} = -\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_o}\vec{k}$ d'où, il résulte que $dV = +\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_o} dz \Rightarrow V = \dfrac{\rho a}{2\varepsilon_o} z + V_o$

Or, $V = -\dfrac{\rho a^2}{8\varepsilon_o}$ en $z = -a/2$; la constante arbitraire est donc $V_o = -\dfrac{\rho a^2}{8\varepsilon_o} + \dfrac{\rho a^2}{4\varepsilon_o} = +\dfrac{\rho a^2}{8\varepsilon_o}$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho a}{2\varepsilon_o} z + \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_o}$$



Exercice 9

Une distribution de charges électriques de densité volumique uniforme ρ , est répartie entre deux sphères concentriques de centre O et de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$). Calculer le champ et le potentiel électriques en tout point, à l'aide du théorème de Gauss. On admettra que le potentiel est nul à l'infini. Représenter graphiquement les variations de ces deux grandeurs en fonction de la distance à O.

Solution

Prenons O comme origine d'un repère $(Oxyz)$ muni des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) .

En raison de la symétrie sphérique de centre O de la distribution, le champ produit est radial et ne dépend que de sa distance r à O ; on a donc $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

et $dV = -\vec{E} \cdot \vec{MM'} = -E(r)\, dr$ car $\vec{MM'} = dr\, \vec{u}_r + r\, d\theta\, \vec{u}_\theta + r \sin\theta\, d\phi\, \vec{u}_\phi$.

Surfaces de Gauss : des sphères de centre O.

1/ Etude pour $R_2 \leq r$.

$Q_{\text{int}} = \rho\, 4\pi \left(R_2^3 - R_1^3\right)/3$ avec flux sortant : $\Phi = \iint_{Se} \vec{E}\,.\vec{u}_r\, d^2S = E(r) \iint_{Se} d^2S = E(r)\, 4\pi\, r^2$.

d'où $\quad \vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o\, r^2}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\vec{u}_r$

et $dV = -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_o\, r^2}\left(R_2^3 - R_1^3\right)dr \quad \Rightarrow \quad V = +\dfrac{\rho}{3\varepsilon_o\, r}\left(R_2^3 - R_1^3\right) + V_e$

avec V_e constante arbitraire nulle, puisque $V \to 0$ lorsque $r \to \infty$, par hypothèse.

Rqe : pour $r = R_2$, le potentiel vaut $\dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(R_2^2 - \dfrac{R_1^3}{R_2}\right)$.

2/ Etude pour $R_1 \leq r \leq R_2$.

Surface de Gauss : la surface sphérique $S_i(O,r)$, équivalant à faire jouer à r un rôle analogue à celu joué par R_2 dans l'étude précédente, d'où :

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_o\, r^2}\left(r^3 - R_1^3\right) \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)\vec{u}_r$$

$$\text{et donc : } dV = -\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)dr \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}\right) + V_i$$

avec V_i constante arbitraire telle que $-\dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\dfrac{R_2^2}{2} + \dfrac{R_1^3}{R_2}\right) + V_i = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(R_2^2 - \dfrac{R_1^3}{R_2}\right)$, d'après la valeur du potentiel obtenue pour $r = R_2$ dans l'étude précédente. Il s'ensuit que :

$$V = -\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} - \frac{3R_2^2}{2}\right).$$

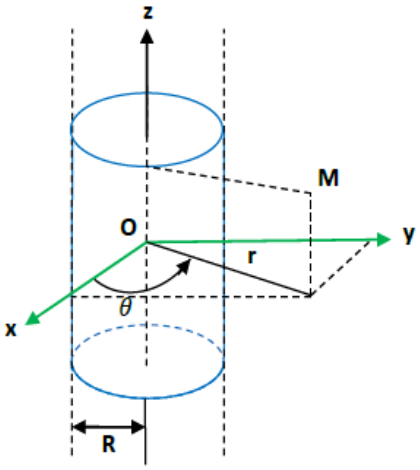
Rqe : pour $r = R_1$, le potentiel vaut $-\dfrac{\rho}{2\varepsilon_o}\left(R_1^2 - R_2^2\right)$.

3/ Etude pour $r \leq R_1$.

Le flux à travers la *surface sphérique* $S_o(O,r)$ est nul puisque cette surface ne contient pas de charges. $E(r)$ est donc nul lui aussi ; ce qui entraîne que le potentiel soit constant et nécessairement égal à la valeur qu'il possède à la limite $r = R_1$, soit tel que, d'après l'étude précédente : $V = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_o}\left(R_1^2 - R_2^2\right)$.

Exercice 10

On considère un cylindre de rayon R, de longueur infinie, chargée uniformément en surface par une densité surfacique $\sigma > 0$. 1 l'aide du théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique en tout point M de l'espace, crée par cette distribution. M est un point situé à la distance r de l'axe Oz du cylindre et repéré par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z) (figure).



1. Déterminer la direction de E(M) et les variables dont il dépend.
2. a. définir la surface de Gauss que vous utilisez
   b. déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace

3. Déduire le potentiel V(M) pour tous les points de l'espace.

4. tracer les courbes de E® et V(r)

5. Quelles sont les lignes de champ et les surfaces équipotentielles pour cette distribution de charges.

Solution

1. la direction et le sens du champ électrostatique

- la direction admet comme plans des symétries, un plan P_1 passant par le point M et contenant l'axe zz', et un autre plan P_2 perpendiculaire a l'axe zz'.

En déduire que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est porté par l'intersection de ces plans, i.e l'axe de direction $\overrightarrow{er} \rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\,\overrightarrow{er}$

- la distribution est invariante par toute rotation auteur de zz'

$$\vec{E}(M) = E_r(r,z)\,\overrightarrow{er}$$

- à distribution est invariante par toute translation selon l'axe zz'

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\,\overrightarrow{er}$$

2. a) choix de la surface de Gauss

le champ $\vec{E}(M)$ est radial et constant sur un cylindre de l'axe zz' et de rayon r, la surface de Gauss sera un cylindre de rayon r et de hauteur h.

b) le champ $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace

d'après théorème de Gauss

$$\emptyset = \oiint_{SG} \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Où SG= S_{B1} + S_{B2} + S_L ; S_{B1} : surface de la 1 ère base supérieure du cylindre et S_{B2} : celle inférieure

$$\emptyset = \oiint_{SG} \vec{E}\overrightarrow{dS} = \oiint_{SB1} \vec{E}\overrightarrow{dS} + \oiint_{SB2} \vec{E}\overrightarrow{dS} + \oiint_{S} \vec{E}\overrightarrow{dS}$$

$\rightarrow \quad \emptyset = E_r(r).2\pi rh$

1er car r < R: $Q_{int} = 0 \implies E(r) = 0$
2 eme cas r > R donc $Q_{int} = \iint \sigma dS = \sigma 2\pi Rh$
Donc :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{r\varepsilon_0}\overrightarrow{er}$$

3. le potentiel V(M) pour tous les points M de l'espace

on a $\vec{E}(M) = \overrightarrow{-grad}V(M)$ donc

$$E(r) = -\frac{dV(M)}{dr}$$

1er car r < R: E(r) = 0 d'où V_{int} (M) = V_0

2 eme cas r > R on a

$\vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{r\varepsilon_0}\overrightarrow{er}$ et
$E(r) = -\frac{dV(M)}{dr}$

Donc V_{ext} (M) = $\frac{\sigma R}{r\varepsilon_0}\ln(r) + V_0 - \frac{\sigma R}{r\varepsilon_0}\ln(R)$

D'où V_{ext} (M) = $\frac{\sigma R}{r\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0$

Exercice 11

Soit un segment AB uniformément chargé avec une densité linéique λ > 0 (figure 1) On désigne par O le milieu du segment AB. Calculer le champ $\vec{E}$ crée par cette distribution en tout point M sur une distance a de la médiatrice de AB et en un point M appartenant au segment AB.

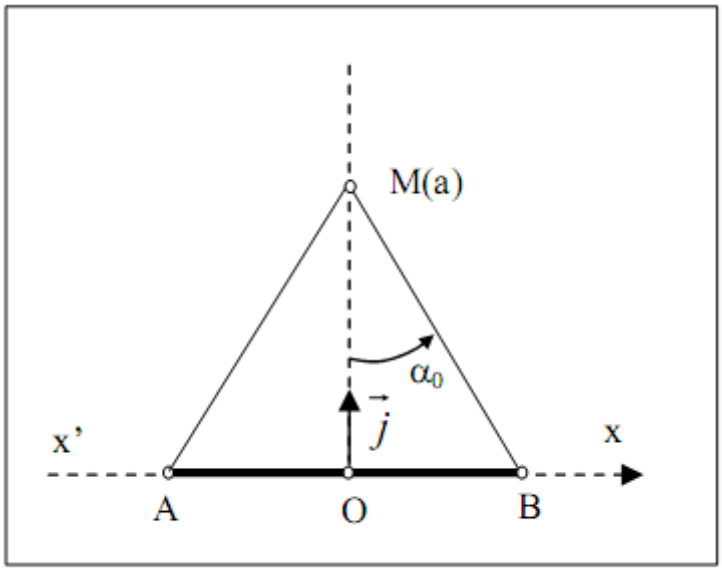


Figure 1

Solution

1) Le point M est sur la médiatrice de AB

Considérons les points A et B sur l'axe x'x tel que l'origine O soit le milieu de AB (figure). Deux éléments de charges dq_1 et dq_2, centrés en deux points P_1 et P_2 symétriques par rapport à O, créent en M des champs électrostatiques élémentaires respectivement $d\vec{E}_1$ et $d\vec{E}_2$. La résultante de ces champs est portée par la médiatrice (OM), par exemple l'axe y'y de vecteur j.

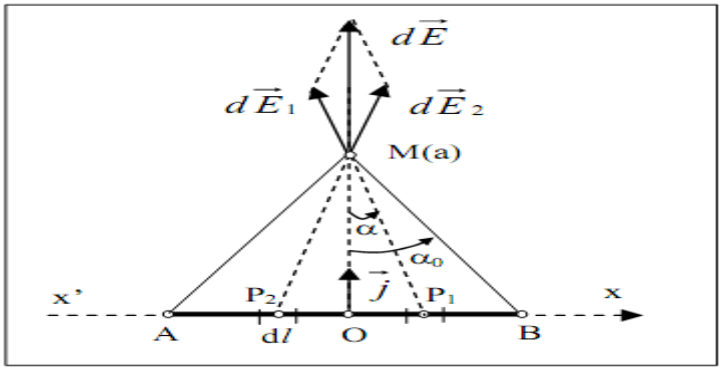


Figure 2

Le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par l'ensemble de la charge portée par le segment AB est donc, par raison de symétrie, dirigé suivant l'axe des y. Soit,

$$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_1M}}{\left\|\overrightarrow{P_1M}\right\|^3} = \frac{\lambda dx}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{\vec{u}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}\cos\alpha\,\vec{j}$$

Si on choisit α comme variable d'intégration, on aura :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0}\frac{\cos\alpha}{a}d\alpha\,\vec{j}$$

$$\text{avec, } tg\alpha = \frac{x}{a}$$

$$dx = a(1+tg^2\alpha)d\alpha = \frac{a}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2}$$

Pour x = - L, $\alpha = -\alpha_0$ et pour x = + L, $\alpha = \alpha_0$

Soit,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\sin\alpha_0\,\vec{j} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}\vec{j}$$

Cas limite

- Si le point M est très éloigné de l'origine O (a >> L), on a :

$$\sin\alpha_0 = \frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}} \cong \alpha_0 \cong \frac{L}{a}$$

et donc,

$$\vec{E} \cong \frac{2\lambda L}{2\Pi\varepsilon_0 a^2}\vec{j}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par une charge Q= 2λL concentrée en O.

- Si le point M est très proche du segment (L >> a), on a :

$$\alpha_0 \to \frac{\Pi}{2}$$

et

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\vec{j}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par un fil de longueur infinie uniformément chargé.

2) Le point M appartient à (AB)

Un élément de charge dq=λdx centré en P crée en M un champ élémentaire $d\vec{E}$ porté par $\vec{i}$ (figure 3) :

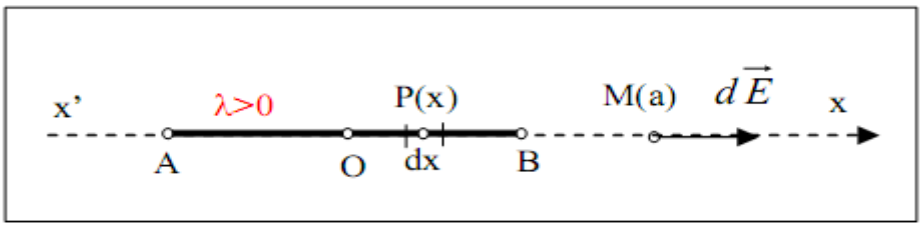


Figure 3

$$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = \frac{\lambda dx}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{i}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{dx}{(a-x)^2}\vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{dx}{(a-x)^2}\vec{i} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{-d(a-x)}{(a-x)^2}\vec{i} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0}\frac{L}{(a^2-L^2)}\vec{i}$$

soit,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0}\frac{L}{(a^2-L^2)}\vec{i}$$

Cas limite

Si le point M est très éloigné du segment [AB] (a >> L), on a :

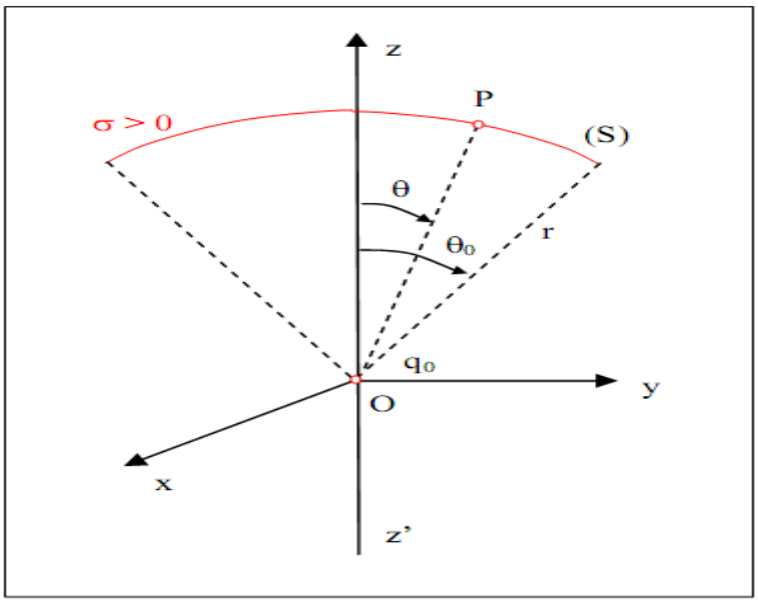
$$\vec{E} \cong \frac{2\lambda L}{4\Pi\varepsilon_0 a^2}\vec{i}$$

C'est équivalent du champ créé en M par une charge Q= 2λL concentrée en O.

<u>Exercice 12</u>

On considère la surface (S) découpée sur une sphère de centre O et de rayon r par un cône de sommet O et de demi-angle au sommet θ0 (calotte sphérique). Cette surface est uniformément chargée avec la densité surfacique σ > 0(figure).

Calculer la charge totale Q portée par cette surface (S) et de déterminer la force électrostatique $\vec{F}$ qu'elle exerce sur une charge ponctuelle q0 positive placée en O.



Solution

1) Charge totale d'une calotte sphérique chargée en surface

La charge totale Q de la répartition est donnée par :

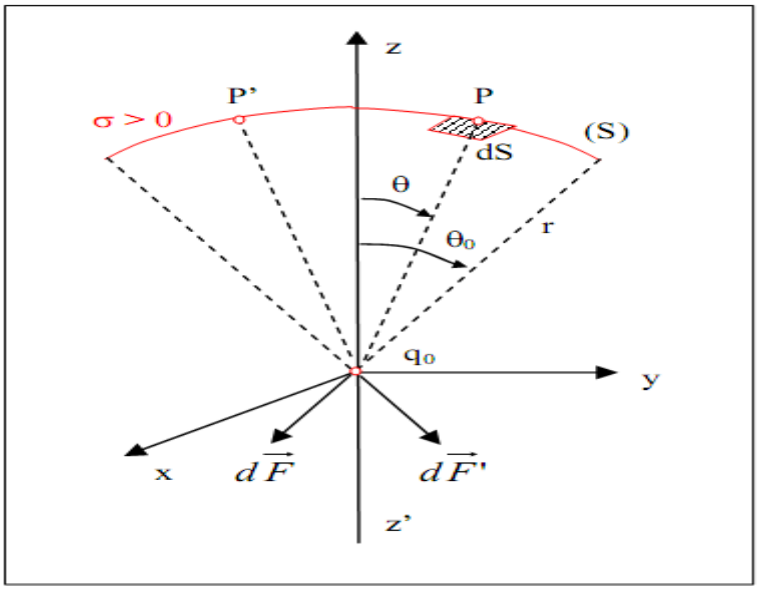
$$Q = \iint_{(S)} dq = \iint_{(S)} \sigma dS$$

dS est exprimée en coordonnées sphériques

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$Q = \sigma \iint_{(S)} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \sigma r^2 \int_0^{\theta_0} \sin\theta d\theta \int_0^{2\Pi} d\varphi$$

$$Q = 2\Pi \sigma r^2 (1 - \cos\theta_0)$$



2) Force exercée par la calotte chargée en surface sur une charge ponctuelle

La charge élémentaire $dq=\sigma dS$, portée par un élément de surface dS centré en P (figure ci dessus) exerce sur la charge q0 placée en O la force :

$$d\vec{F} = \frac{q_0 dq}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PO}}{\left\|\overrightarrow{PO}\right\|^3}$$

$$\text{avec, } \left\|\overrightarrow{PO}\right\| = r$$

Un autre élément de charge dq' de point P', symétrique de P par rapport à l'axe z'z (axe de révolution), exerce sur q0 une force élémentaire $d\vec{F}'$. La résultante des forces $d\vec{F}$ et $d\vec{F}'$ n'a de composante non nulle que suivant l'axe z'z. Donc, toutes les contributions des éléments de charge, constituent la charge totale de la surface (S) et considérés deux à deux, donnent une force totale $\vec{F}$ portée par l'axe z'z de vecteur unitaire $\vec{k}$.

$$\left\|d\vec{F}_z\right\| = \frac{q_0 \sigma dS}{4\Pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

ainsi,

$$\left\|\vec{F}_z\right\| = \frac{q_0 \sigma r^2}{4\Pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^{\theta_0}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\Pi} d\varphi$$

$$\vec{F}_z = -\frac{q_0 \sigma \sin^2\theta_0}{4\varepsilon_0}\vec{k}$$

ou encore :

$$\vec{F}_z = -\frac{q_0 Q\cos^2(\theta_0/2)}{4\Pi\varepsilon_0 r^2}\vec{k}$$

Exercice 13

Soient deux charges électriques ponctuelles, portées par un axe *x'Ox* : *-q* en *A* (*-a*) et *+q* en *B* (*+a*) avec *q* positive.

1. Exprimer le champ électrique créé en *M* (*x*) par cette distribution dans le vide, *M* appartenant à l'axe *x'Ox*.
2. Représenter Ex en fonction de x

Solution

1. Champ électrique en un point de l'axe *x'Ox*.

Le plan perpendiculaire (P) à l'axe *x'Ox* et passant par le point *O* est un plan d'antisymétrie de la distribution des deux charges. On a donc en un point *M'* appartenant à l'axe *x'Ox* et symétrique d'un point *M* de ce même axe par rapport au plan (P) :

$$\vec{E}(M') = -Sym_{(P)}\left(\vec{E}(M)\right)$$

$$E_x(-x) = E_x(x)$$

On étudie alors les propriétés de cette distribution en un point:

$$M \in [0, +\infty[$$

On exprime le champ créé par les charges en un point *M* de l'axe *x'Ox* :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{BM^2}\vec{u}_{BM} - \frac{1}{AM^2}\vec{u}_{AM}\right)$$

Pour *x* > *a* :

$$\vec{u}_{AM} = \vec{u}_{BM} = \vec{u}_x$$

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{(x-a+x-a)(x+a-x+a)}{(x-a)^2(x+a)^2}\right)$$

$$E_x = \frac{qax}{\pi\varepsilon_o\left(x^2-a^2\right)^2}$$

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{qa}{\pi\varepsilon_o}\left(\frac{\left(x^2-a^2\right)^2 - 2x\left(x^2-a^2\right)2x}{\left(x^2-a^2\right)^4}\right)$$

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{qa}{\pi\varepsilon_o}\frac{\left(x^2-a^2\right)-4x^2}{\left(x^2-a^2\right)^3} = -\frac{qa}{\pi\varepsilon_o}\frac{3x^2+a^2}{\left(x^2-a^2\right)^3} < 0$$

E_x est une fonction décroissante pour $x > a$

pour :

$0 \le x < a$

$$\vec{u}_{AM} = -\vec{u}_{BM} = \vec{u}_x$$

$$E_x = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{\left(x^2+2ax+a^2\right)+\left(x^2-2ax+a^2\right)}{(x-a)^2(x+a)^2}\right)$$

$$E_x = -\frac{q\left(x^2+a^2\right)}{2\pi\varepsilon_o\left(x^2-a^2\right)^2}$$

$$\frac{dE_x}{dx} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_o}\left(\frac{2x\left(x^2-a^2\right)^2-\left(x^2+a^2\right)2\left(x^2-a^2\right)2x}{\left(x^2-a^2\right)^4}\right) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_o}2x\left(\frac{\left(x^2-a^2\right)^2-2\left(x^2+a^2\right)\left(x^2-a^2\right)}{\left(x^2-a^2\right)^4}\right)$$

$$\frac{dE_x}{dx} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_o}2x\left(\frac{\left(x^2-a^2\right)^2-2\left(x^4-a^4\right)}{\left(x^2-a^2\right)^4}\right) = -\frac{q}{\pi\varepsilon_o}x\left(\frac{x^4-2a^2x^2+a^4-2x^4+2a^4}{\left(x^2-a^2\right)^4}\right)$$

$$\frac{dE_x}{dx} = -\frac{q}{\pi\varepsilon_o}x\left(\frac{-x^4-2a^2x^2+3a^4}{\left(x^2-a^2\right)^4}\right) = -\frac{q}{\pi\varepsilon_o}x\left(\frac{4a^4-\left(x^2-a^2\right)^2}{\left(x^2-a^2\right)^4}\right) < 0$$

E_x est une fonction décroissante pour $0 \le x < a$

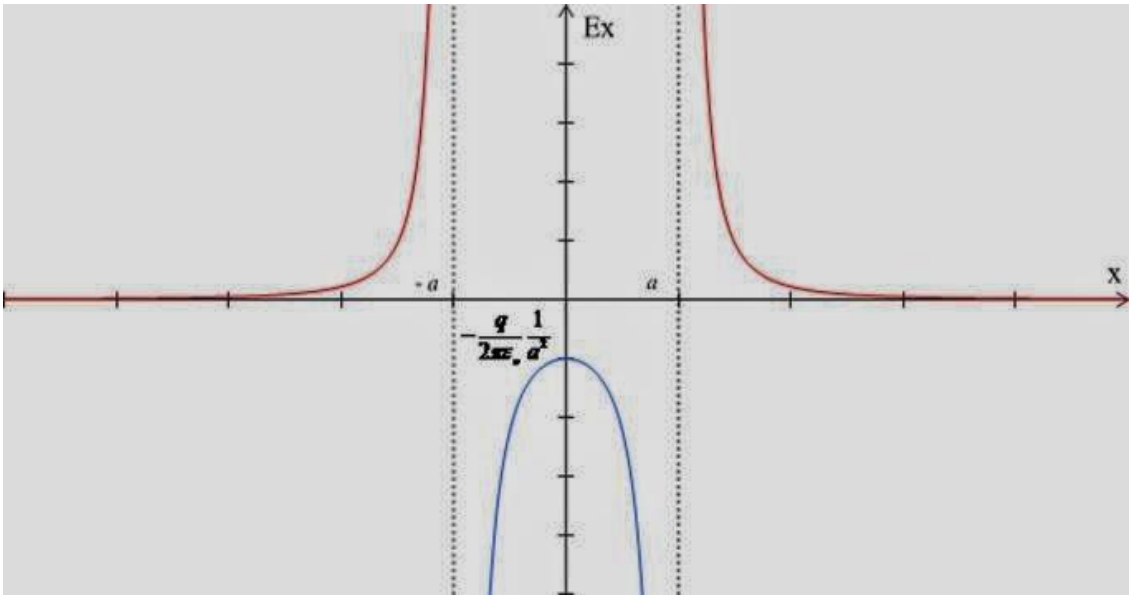
Pour $x = 0$ on a :

$$\frac{dE_x}{dx} = 0$$

la fonction passe un extremum

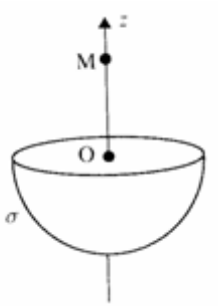
$$E_x(0) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{a^2}$$

2. Représentation graphique.



Exercice 14

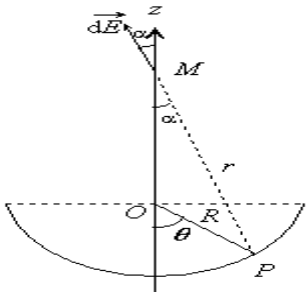
On considère une demi sphère de centre *O*, de rayon *R*, chargée uniformément en surface avec la densité surfacique σ.



Déterminer le champ électrique au point *M*.

Solution

L'axe *Oz* est axe de symétrie de la distribution des charges. Le champ en *M* est donc porté par cet axe.
On considère un élément de surface de la demi-sphère centré en un point *P*.



Le champ électrostatique élémentaire créé par cet élément au point *M* de l'axe *Oz* a pour expression :

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi}{r^2}\vec{u}_{PM}$$

Seule la projection de ce vecteur sur l'axe *Oz* contribue au champ au point *M* :

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}\vec{E}.\vec{u}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi}{r^2}\vec{u}_{PM}.\vec{u}_z$$

Or :

$$r^2 = R^2 \sin^2\theta + (z + R\cos\theta)^2$$

et

$$\vec{u}_{PM}.\vec{u}_z = \cos\alpha = \frac{z + R\cos\theta}{r}$$

D'où :

$$\mathrm{d}E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi}{\left(R^2 \sin^2\theta + (z + R\cos\theta)^2\right)^{3/2}}$$

Par intégration :

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{\sigma R^2 \sin\theta (z + R\cos\theta)\mathrm{d}\theta}{\left(R^2 \sin^2\theta + (z + R\cos\theta)^2\right)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_o}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta (z + R\cos\theta)\mathrm{d}\theta}{\left(R^2 + z^2 + 2zR\cos\theta\right)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_o}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{z\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\left(R^2 + z^2 + 2zR\cos\theta\right)^{3/2}} + \int_0^{\pi/2}\frac{R\sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta}{\left(R^2 + z^2 + 2zR\cos\theta\right)^{3/2}}\right)$$

Or:

$$\mathrm{d}\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{3/2}}2zR\sin\theta \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{-1/2} = zR\frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{3/2}}$$

Soit:

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_o}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{-1/2}}{R} + \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{-1/2}}{z}\cos\theta\right)$$

Posons :

$$X = \left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{-1/2} \quad \rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2zR}\left(\frac{1}{X^2} - z^2 - R^2\right)$$

pour:

$$\text{pour } \theta = 0 \quad X = \frac{1}{R + z}$$

$$\text{pour } \theta = \pi/2 \quad X = \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_o}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{-1/2}}{R} + \int_{X = \frac{1}{R+z}}^{X = \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}}\frac{1}{2z^2R}\left(\frac{1}{X^2} - z^2 - R^2\right)\mathrm{d}X\right)$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{R+z}\right) + \frac{\sigma R}{4\varepsilon_o z^2}\int_{X=\frac{1}{R+z}}^{X=\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}} \left(\frac{1}{X^2} - z^2 - R^2\right) dX$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{R+z}\right) - \frac{\sigma R}{4\varepsilon_o z^2}\left[\frac{1}{X} + \left(z^2+R^2\right)X\right]_{X=\frac{1}{R+z}}^{X=\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}}$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{R+z}\right) - \frac{\sigma R}{4\varepsilon_o z^2}\left(\left(R^2+z^2\right)^{1/2} + \frac{\left(R^2+z^2\right)}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - (R+z) - \frac{R^2+z^2}{R+z}\right)$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{R+z}\right) - \frac{\sigma R}{4\varepsilon_o z^2}\left(2\left(R^2+z^2\right)^{1/2} - 2\frac{R^2+z^2+zR}{R+z}\right)$$

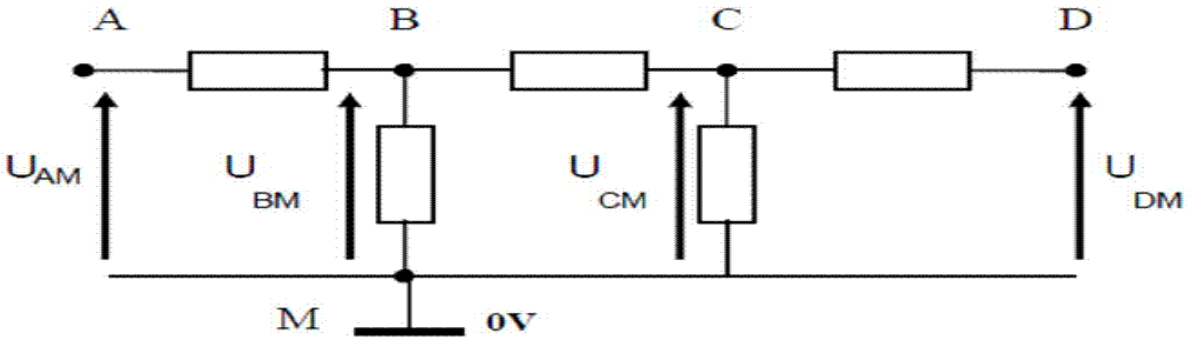
$$E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{R+z} - \frac{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}{z^2} + \frac{R^2+z^2+zR}{z^2(R+z)}\right)$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}{z^2} + \frac{1}{R+z}\left(\frac{R^2+z^2+zR}{z^2} - 1\right)\right)$$

$$\boxed{E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{R}{z^2} + \frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}{z^2}\right)}$$

Exercice 15

Soit le schéma suivant :



On donne : U_{AM} = 12V, U_{BM} = 8V, U_{CM} = 6V et U_{DM} = 4V

1. Calculer V_A, V_B, V_C et V_D
2. En déduire les tensions U_{AB}, U_{BC} et U_{CD}

Solution

1). $V_A = U_{AM} = 12V$,

$V_B = U_{BM} = 8V$,

$V_C = V_{CM} = 6V$, et

$V_D = V_{DM} = 4V$

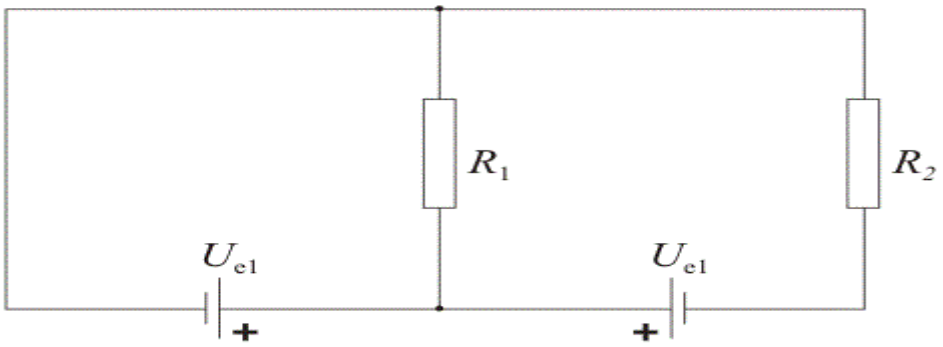
2). $U_{AB} = V_A - V_B = 12V - 8V = 4V$,

$U_{BC} = V_B - V_C = 8V - 6V = 2V$ et

$U_{CD} = V_C - V_D = 6V - 4V = 2V$

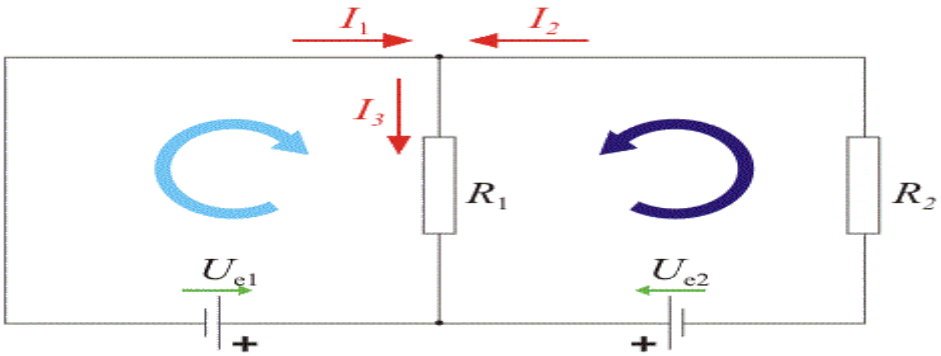
Exercice 16

Nous avons deux sources identiques de 10 V de tension électromotrice (blocs d'alimentation) et deux identiques résistances dz 20 Ω connectées ensemble comme le montre la figure.



Trouver les courants traversant chacune des résistances. Supposons qu'il n'y a pas de résistance interne de toute alimentation électrique.

Solution



la loi actuelle de Kirchhoff: : $I1+I2=I3$

$I1+I2=I3$
La loi de tension de Kirchhoff appliquée sur les boucles (bleu clair et bleu foncé):

$R1I3=-Ue1$(bleu clair)
$R2I2+R1I3=-Ue2$(bleu foncé)

Nous savons que $R1=R2, Ue1=Ue2$, nous allons donc soustraire la première équation du second à obtenir la valeur de I_2:

$$R2I2=Ue1-Ue2=0$$
$$I2=0$$

En utilisant la loi actuelle de Kirchhoff nous obtenons $I3=I1$
.
Exprimons I_3de la loi actuelle de Kirchhoff correspondant à la flèche bleu clair:

$$R1I3=-Ue1$$
$$I3=-Ue1R1$$

Résolution des lois de Kirchhoff , nous avons obtenu des valeurs des courants I_2, I_3:

$$I2=0A$$
$$I3=-Ue1R1$$

Maintenant , nous pouvons calculer la valeur du courant I_3:

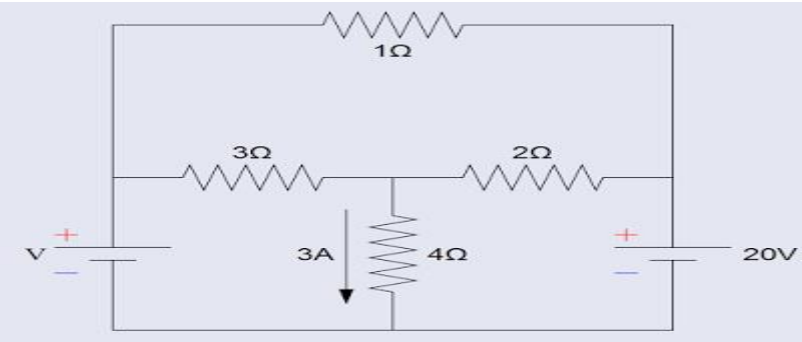
$$I3=-1020A=-0.5A$$

Un résultat négatif signifie que la véritable orientation actuelle de I_3 est oposite à la direction que nous avons tiré (flèche rouge) dans le diagramme.

<u>Exercice 17</u>

Compte tenu du circuit ci-dessous avec 3 A du courant traversant la résistance de 4 Ω comme indiqué sur le schéma à droite. Déterminer…

1. le courant à travers chacune des autres résistances,
2. la tension de la batterie sur la gauche, et
3. la puissance délivrée au circuit par la batterie à droite.



1. ***Solution***
   Identifions les courants traversant les résistances de la valeur de la résistance *(I_1, I_2, I_3, I_4)* , et les courants traversant les piles par le côté du circuit sur laquelle ils pondent *(I_L, I_R).* Commencez avec la résistance de 2 Ω. Appliquer la règle de la boucle du circuit en bas à droite.

   $20\ V = I_2\ (\Omega\ 2) + (3\ A)\ (4\ \Omega)$

   $I_2 = 4\ A$

2. Passez à la résistance 3 Ω. Appliquer la règle de jonction à la jonction dans le centre du circuit.

   $I_2 = I_3 + I_4$

   $A = 4\quad I_3 + 3\ A$

   $I_3 = 1\ A$

3. Le courant à travers la résistance de 1 Ω exécuté certainement de droite à gauche. Si l'on applique la règle de la boucle du circuit supérieur, nous aurons à courir contre ce courant. Cela change ce qui est normalement considéré comme une chute de potentiel en une augmentation potentielle. (Un peu comme le ski sur une montagne au lieu de descendre.)

   $I_1\ (1\ \Omega) = (4\ A)\ (2\ \Omega) + (1\ A)\ (3\ \Omega)$

   $I_1 = 11\ A$

4. Appliquer la règle de la boucle du circuit externe pour obtenir la tension de la batterie sur la gauche (continuer avec l'hypothèse que le courant est en marche dans le sens antihoraire). Nous nous trouvons en cours d'exécution à travers la batterie gauche vers l'arrière. Cela change ce qui est normalement considéré comme une augmentation potentielle en une diminution potentielle. (Un peu comme l'utilisation des remontées mécaniques pour descendre une montagne au lieu de monter.)

   $20\ V = (11\ A)\ (12\ \Omega) + V_2$

   $V_L = 9\ V$

5. Vérifions ce résultat en répétant la procédure pour le circuit inférieur.

$20\ V = (4\ A)(2\ \Omega) + (1\ A)(3\ \Omega) + V_2$

$V_L = 9\ V$

6. Bon, nous obtenons la même réponse par deux méthodes. Nous devons faire la bonne chose.
7. La puissance délivrée au circuit par la batterie sur la droite est le produit de son temps de tension le courant qu'il entraîne autour du circuit. Nous avons déjà la tension (il est donné dans le problème) tout ce qui reste est de déterminer le courant. Appliquer la règle de jonction à la jonction sur la gauche ...

$I_L = I_1 + I_3$

$I_L = 11\ A + A\ 1$

$I_L = 12\ A$

8. et encore à la jonction au fond ...

$I_R = I_L + I_4$

$I_R = 12\ A + A\ 3$

$I_R = 15\ A$

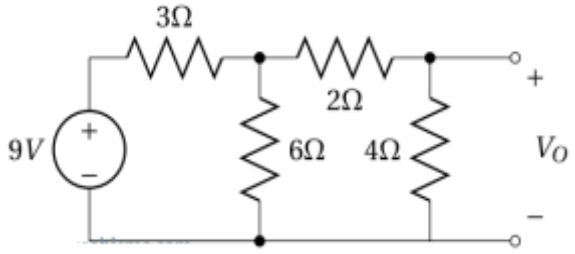
9. pour trouver la puissance de la batterie sur la droite ...

$P = VI$

$P = 300\ W$

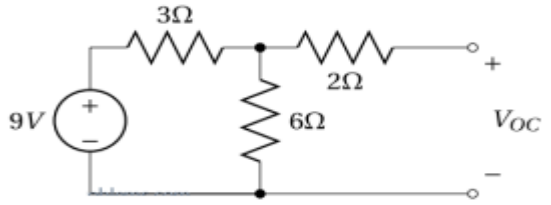
Exercice 18

Utiliser le théorème de Thévenin pour déterminer V_O.

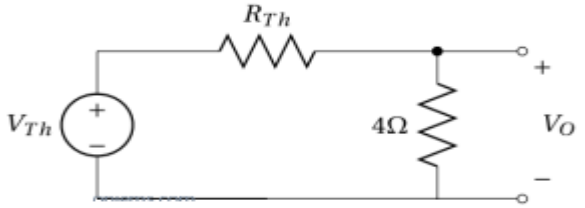


Solution

Pour trouver l'équivalent Thévenin, on rompt le circuit à la 4Ω comme indiqué ci-dessous.



- Briser le circuit à la charge



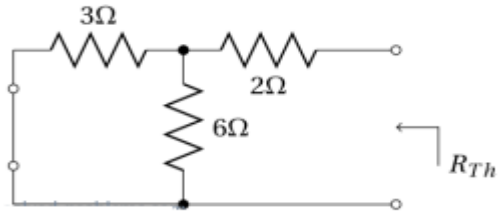
Remplacement du circuit équivalent de Thévenin

$$V_{6\Omega}=\frac{6\Omega}{3\Omega+6\Omega}\times 9V=6V$$

Étant donné que le courant de La résistance 2Ω est nulle:

$$V_{OC}=V_{6\Omega}=6V$$

$$V_{Th}=V_{OC}=6V$$



Éteindre la source de tension pour trouver Rth

Il est trivial de constater que Les résistances 3Ωet 6Ω sont connectées en parallèle puis câblées en série avec la Résistance 2Ω. Donc,

$$R_{Th}=(3\Omega\|6\Omega)+2\Omega=\frac{3\Omega\times 6\Omega}{3\Omega+6\Omega}+2\Omega=4\Omega$$

.

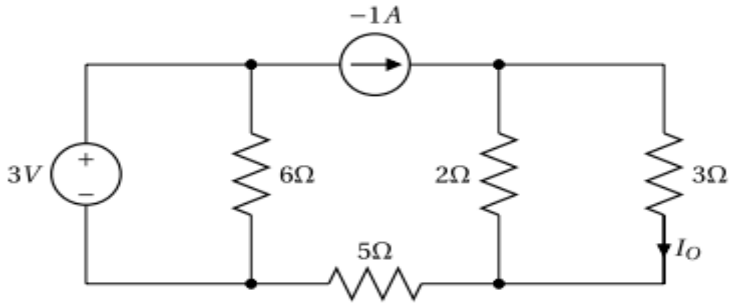
Maintenant que V_{Th}et R_{Th}, On peut utiliser le circuit équivalent de Thévenin représenté sur la Fig. pour calculer V_O Dans le circuit original représenté sur la première Fig. La règle de déviation de tension peut être utilisée ici pour trouver V_O. Nous avons,

$$V_O=\frac{4\Omega}{R_{Th}+4\Omega}\times V_{Th}=\frac{4\Omega}{4\Omega+4\Omega}\times 6V=3V$$

.

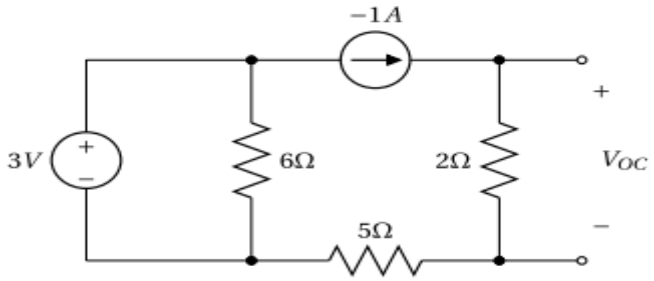
Exercice 19

Utiliser le théorème de Thévenin pour déterminer I_O.

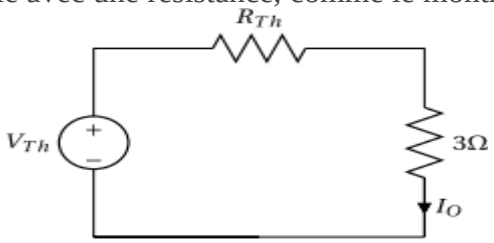


Solution

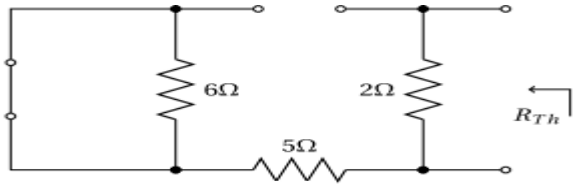
Permet de briser le circuit à la 3Ω Comme le montre la Fig.



Maintenant, nous devrions trouver un circuit équivalent qui ne contient qu'une source de tension indépendante en série avec une résistance, comme le montre la Fig



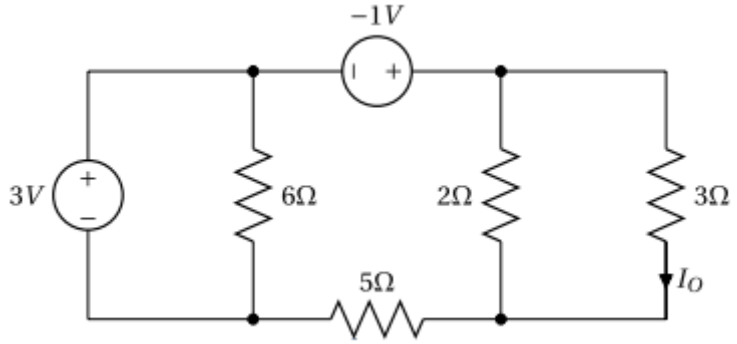
Les inconnus sont V_{Th}et R_{Th}. V_{Th} est la tension en circuit ouvert V_{OC} Représenté sur la Fig.
Il est trivial que le courant de 2Ω Est égale au courant de la source de courant, c'est-à-dire $I_{2\Omega}=-1A$. Donc, $V_{OC}=V_{2\Omega}=2\Omega\times I_{2\Omega}=-2V$. Le théorème de Thévenin dit que $V_{Th}=V_{OC}=-2V$. Veuillez noter que ce n'est pas dire que V_{OC} Est la tension à travers la charge dans le circuit d'origine.



La résistance 6Ω est court-circuitée et la 5Ω L'un est ouvert. Par conséquent, leurs courants sont zéro et $R_{Th}=2\Omega$.
Maintenant que nous avons trouvé V_{Th} et R_{Th}, Nous pouvons calculer I_O dans le circuit

original représenté sur la Fig. (1-27-1) en utilisant le circuit équivalent de Thévenin représenté sur la Fig. Il est trivial que $I_O = \frac{V_{th}}{R_{Th}+3\Omega} = \frac{-2V}{2\Omega+3\Omega} = -\frac{2}{5}A$.

Nous avons utilisé le théorème de Thévenin pour résoudre ce circuit. Un moyen beaucoup plus facile de trouver I_O ici est d'utiliser la règle de dévision actuelle. Le courant de la source actuelle est divisé entre les Résistances 2Ω et 3Ω. Donc,

$$I_O = \frac{2\Omega}{2\Omega+3\Omega} \times (-1A) = -\frac{2}{5}A$$

Maintenant, remplacez la source actuelle par une $-1V$ Comme indiqué ci-dessous et résoudre le problème. Les réponses sont $V_{th} = \frac{4}{7}V$, $R_{th} = \frac{10}{7}\Omega$ et $I_O = \frac{4}{31}A$.