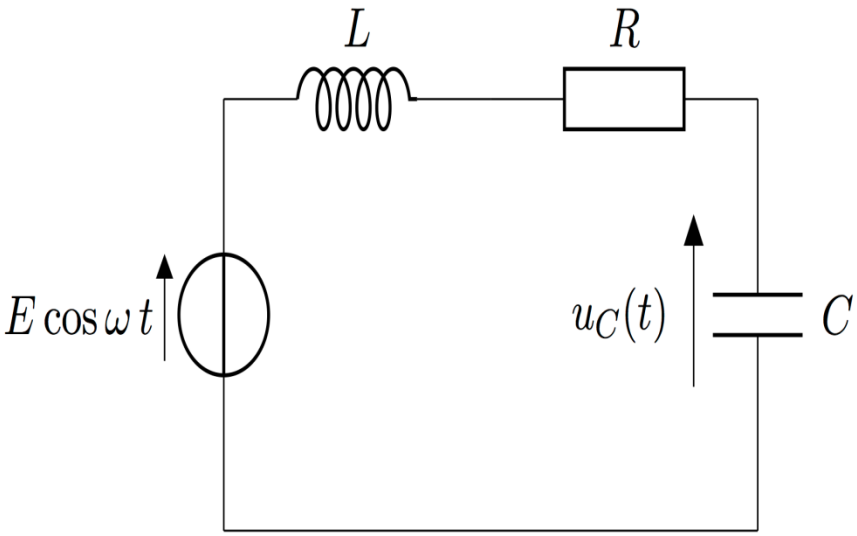
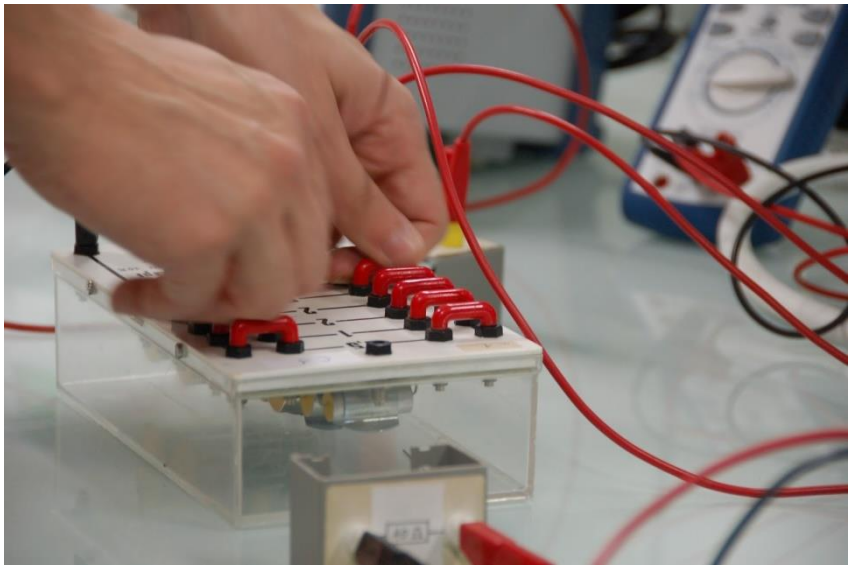
Cours d'*ÉLECTROCINÉTIQUE*





Prof. A. Faize

Chapitre 5:
Lois de l’électrocinétique

PLAN

1. LE COURANT ÉLECTRIQUE
2. CONDUCTIVITÉ ÉLECTRIQUE : LOI D'OHM LOCALE
3. RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE : LOI D'OHM MACROSCOPIQUE
4. ASSOCIATION DE RÉSISTANCES
5. RÔLE DU GÉNÉRATEUR : FORCE ÉLECTROMOTRICE
6. LES LOIS DE KIRCHHOFF
7. ASPECT ÉNERGÉTIQUE : LOI DE JOULE
8. THEOREME DE THEVENIN

ÉLECTROCINÉTIQUE

1. LE COURANT ÉLECTRIQUE

1.1. Vecteur densité de courant

Sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$, chaque électron acquiert une vitesse. En désignant par $\vec{v}$, la *vitesse moyenne* de l'ensemble des électrons (on dit aussi *vitesse d'entraînement* ou *de dérive*), et par ρ la charge volumique du milieu, on définit le vecteur de courant en tout point du milieu par :

$$\vec{j} = \rho\vec{v} \qquad (1)$$

ou encore, puisque $\rho = -ne$ où n est le nombre d'électrons par unité de volume et e la valeur absolue de la charge de l'électron :

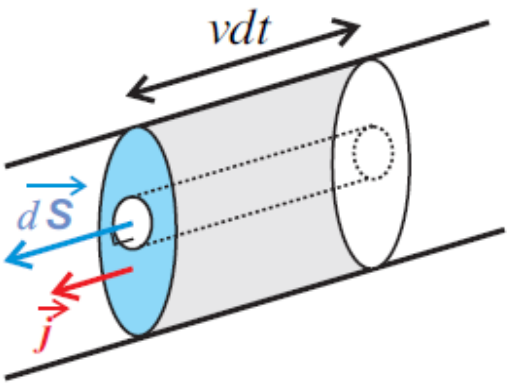
$$\boxed{\vec{j} = -ne\,\vec{v}} \qquad (2)$$

1. LE COURANT ÉLECTRIQUE

1.2. L'intensité du courant électrique

Considérons un fil conducteur de section S orientée, dans lequel des électrons sont animés d'une vitesse $\vec{v}$. Pendant un instant dt, ces électrons parcourent une distance vdt. Soit Φ le flux de $\vec{j}$ à travers une surface (S):

$$\Phi = \iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$



Le flux élémentaire

$$\vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

représente la charge contenue dans le volume du cylindre de longueur vdt et de surface $\mathrm{d}S$; c'est aussi la charge qui traverse $\mathrm{d}S$ pendant l'unité de temps. On peut donc écrire :

$$\boxed{\iint_{(S)} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I} \qquad (3)$$

1. LE COURANT ÉLECTRIQUE

Remarques:

1) On peut généraliser la relation $\vec{j} = -ne\,\vec{v}$ établie dans le cas d'une conduction électronique, au cas où l'on aurait des porteurs de charges de natures différentes. On aura alors :

$$\vec{j} = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k \qquad (4)$$

la sommation se faisant sur toutes les espèces de particules concernées. q_k représente alors la valeur algébrique de la charge de la particule de type k.

2) Un régime est dit stationnaire (permanent) si la distribution des charges et des courants est indépendante du temps. Par conséquent:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (5)$$

C'est le cas du courant continu qu'on va considérer dans cette étude.

2. CONDUCTIVITÉ ÉLECTRIQUE : LOI D'OHM LOCALE

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = q\vec{E} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{V} = \frac{q}{m}\vec{E}t + \vec{V}_0$$

Visiblement, cette vitesse (et par conséquent $\vec{j}$) tend vers l'infini au cours du temps, ce qui ne peut être satisfaisant. La solution consiste à envisager les « chocs » multiples que subit la charge q dans son mouvement, notamment sur les atomes du réseau cristallin.

Tout d'abord, la vitesse initiale $\vec{V}_0$ étant aléatoire, sa valeur moyenne $\vec{v}_0$ est nulle. En désignant par τ le temps moyen séparant deux chocs successifs, la vitesse de dérive s'écrit :

$$\vec{v} = \langle\vec{V}\rangle = \frac{q\vec{E}}{m}\tau$$

On en déduit :

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$$

2. CONDUCTIVITÉ ÉLECTRIQUE : LOI D'OHM LOCALE

puisque $\rho = nq$ où n est le nombre de charges par unité de volume.
La relation cherchée s'écrit :

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}} \qquad (6)$$

où :

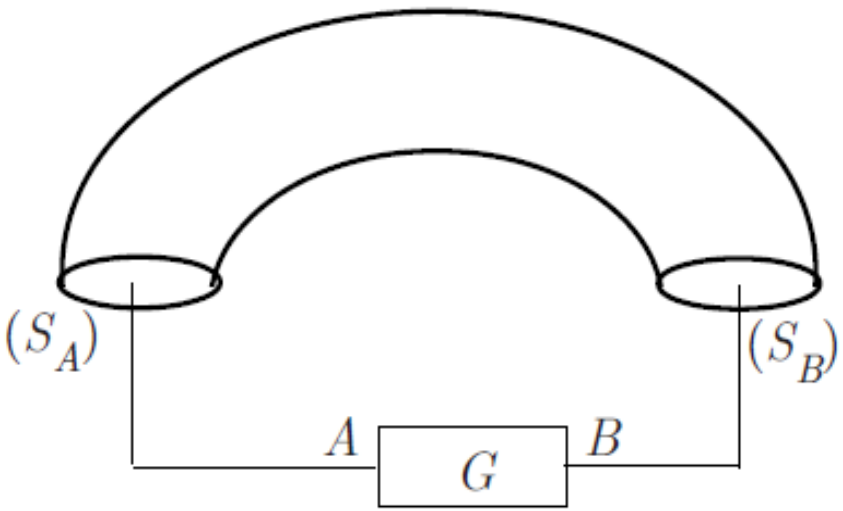
$$\boxed{\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}} \qquad (7)$$

σ est la *conductivité électrique* du matériau, elle s'exprime en siemens par mètre ($\mathrm{s \cdot m^{-1}}$).
La loi $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ constitue la loi d'Ohm dans sa forme locale, valable en tout point du conducteur.

La résistivité ρ est définie comme l'inverse de la conductivité :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{n|q\mu|} \text{ elle s'exprime en } \Omega \cdot \mathrm{m}.$$

3. RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE :LOI D'OHM MACROSCOPIQUE



$$V_A - V_B = \int_{\widehat{AB}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{\widehat{AB}} \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

En régime stationnaire on peut définir la densité de courant en un point comme :

$$j = \frac{I}{S}$$

où I est l'intensité du courant et S l'aire de la section droite du conducteur en ce point.

On a donc :

$$V_A - V_B = \frac{I}{\sigma} \int_{\widehat{AB}} \frac{d\ell}{S}$$

3. RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE :LOI D'OHM MACROSCOPIQUE

En introduisant la résistance R du conducteur donnée par :

$$R = \frac{1}{\sigma} \int_{\widehat{AB}} \frac{d\ell}{S}$$

qui s'exprime en ohms (Ω) on obtient :

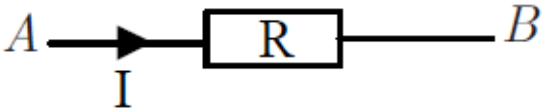
$$\boxed{V_A - V_B = RI} \qquad (8)$$

qui constitue la loi d'Ohm macroscopique.

Il convient de bien noter les conventions adoptées pour définir les signes des courants et des d.d.p.

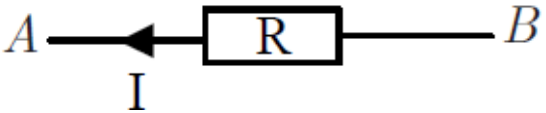
Si $V_A > V_B$, I entre par A et sort par B ; on écrit :

$$V_{AB} = V_A - V_B = RI$$



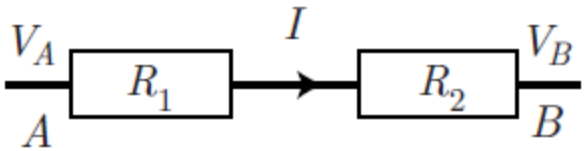
Si $V_A < V_B$, I entre par B et sort par A. Il convient d'écrire :

$$V_{AB} = V_A - V_B = -RI$$



4. ASSOCIATION DE RÉSISTANCES

4.1 Résistances en série



On a :

$$V_A - V_B = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$

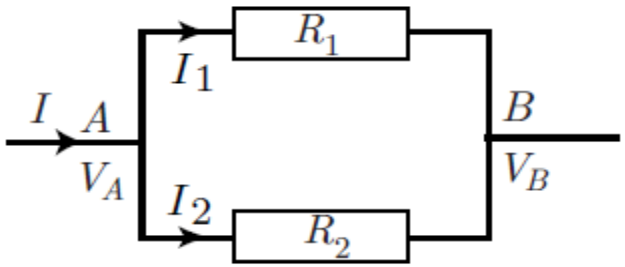
Résistance équivalente : $R = R_1 + R_2$

Pour n résistances en séries, on a:

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{n} R_i} \qquad (9)$$

4. ASSOCIATION DE RÉSISTANCES

4.1 Résistances en parallèle



On a :

$$V_A - V_B = R_1 I_1 = R_2 I_2$$
$$= R(I_1 + I_2)$$

Par conséquent : $\dfrac{R}{R_1} = \dfrac{I_1}{I_1 + I_2}$ et $\dfrac{R}{R_2} = \dfrac{I_2}{I_1 + I_2}$

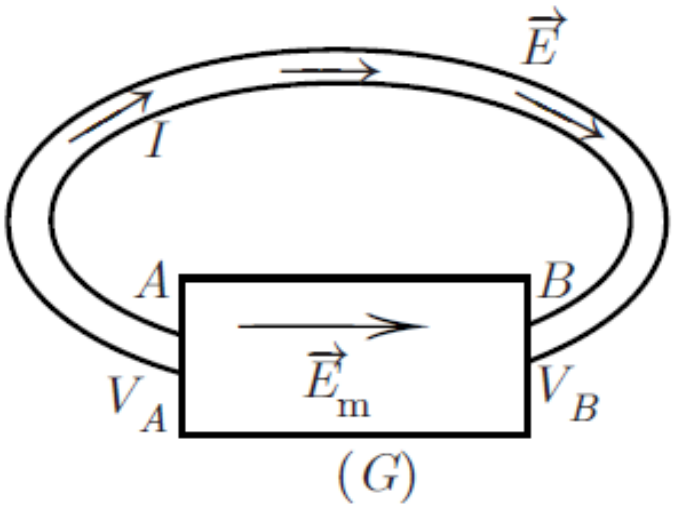
D'où : $\dfrac{R}{R_1} + \dfrac{R}{R_2} = 1$ et $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

Pour n résistances en parallles, on a:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} \qquad (10)$$

5. RÔLE DU GÉNÉRATEUR : FORCE ÉLECTROMOTRICE

Soit un générateur (G), appliquant une d.d.p. $V_A - V_B > 0$ aux bornes d'un conducteur AB.
En régime stationnaire ou quasi stationnaire, on a div $\vec{j} = 0$ en tous les points du circuit, y compris dans le générateur, et les lignes de champ sont des courbes fermées.



Si le conducteur était fermé sur lui-même, on aurait :

$$\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0 \quad \text{puisque} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

soit :

$$\oint \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0 \quad \text{ce qui entraînerait} \quad \vec{j} = \vec{0}$$

5. RÔLE DU GÉNÉRATEUR : FORCE ÉLECTROMOTRICE

Cette circulation est appelée *force électromotrice e* du générateur (f.é.m.), bien qu'elle ait les dimensions d'un potentiel. On a :

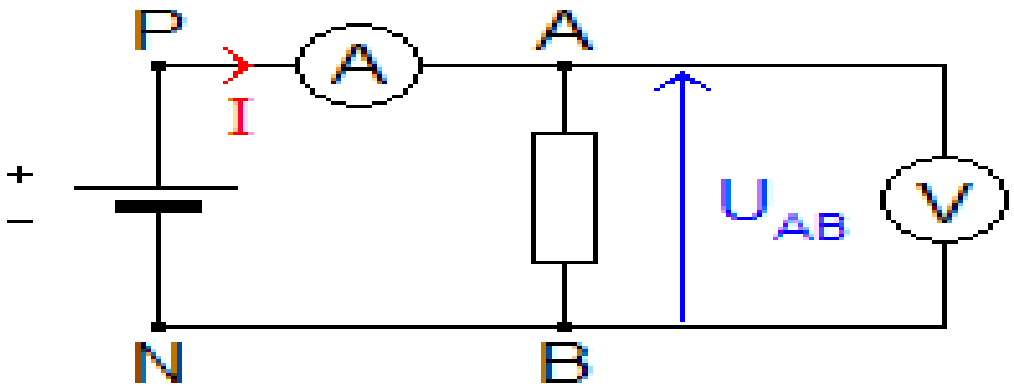
$$\boxed{e = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{E}_{\mathrm{m}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = V_A - V_B} \qquad (11)$$

Le champ E_{m} peut avoir des origines chimiques (piles et accumulateurs) ou magnétiques (f.é.m. induite).

Intensité et tension

intensité *I* du courant électrique est le débit de charge électrique en un point du circuit.
L'intensité s'exprime en ampères (A) et est représentée sur un schéma de circuit par une pointe de flèche sur un fil conducteur.
Si l'orientation choisie est de sens opposé au sens de circulation du courant,

alors l'intensité sera négative



Intensité et tension

Intensité se mesure à l'aide d'un **ampèremètre** branché en série.

L'intensité est la même en tous points d'un circuit en série ou d'une branche d'un circuit en dérivation.

• La **tension** U_{AB} entre 2 points A et B du circuit est la différence de potentiel électrique entre ces 2 points : où V_A et V_B sont les potentiels électriques des points A et B.
La tension et les potentiels s'expriment en volts (V).

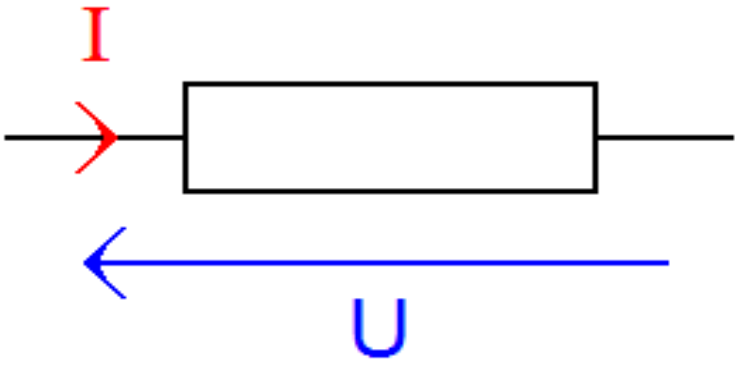
La tension est représentée sur un schéma de circuit par une flèche parallèle au dipôle (U_{AB} : flèche orientée de B vers A).
Elle se mesure à l'aide d'un **voltmètre** branché en dérivation ; pour mesurer U_{AB} on relie le point A du circuit à la borne V du voltmètre et le point B à la borne COM.

Récepteurs et générateurs

• Un **récepteur électrique** est un dipôle qui reçoit de l'énergie électrique pour la convertir en d'autres formes d'énergie.

Exemples : lampe, résistance, moteur, électrolyseur…

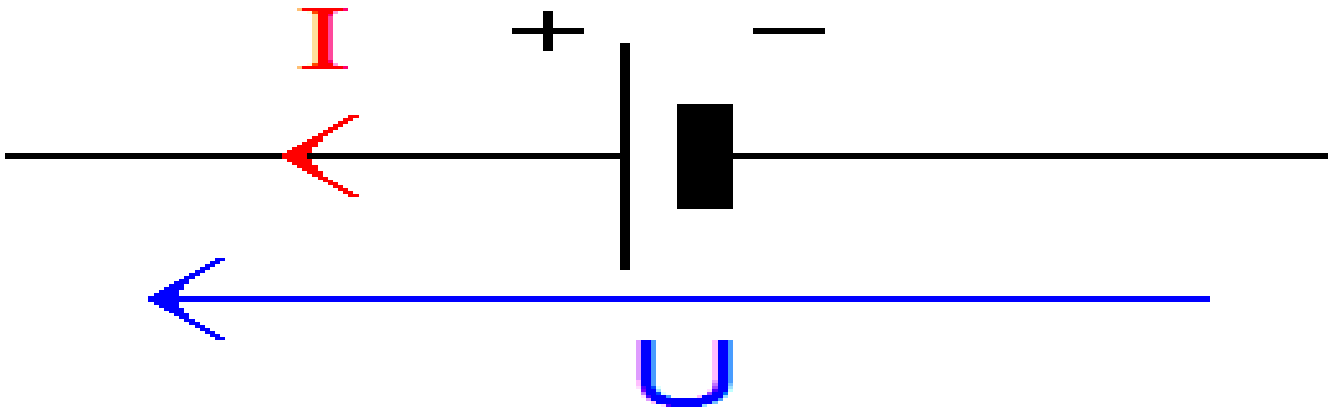
Dans un récepteur le courant circule du point de potentiel le plus haut vers le point de potentiel le plus bas. Ceci correspond à la représentation dite **« convention récepteur »**, dans laquelle les flèches de tension et d'intensité sont de sens opposés.



• Un **générateur électrique** au contraire utilise une source d'énergie pour la convertir en énergie électrique.

Exemples : pile, génératrice, photopile…

Le courant sort par la borne + du générateur. Ceci correspond à la représentation dite **« convention générateur »**, dans laquelle les flèches de tension et d'intensité sont de même sens.



Puissance et énergie électriques

• La **puissance électrique** reçue par un récepteur ou fournie par un générateur est égale au produit de la tension aux bornes du dipôle par l'intensité du courant qui le traverse : (unités : $_e$ en W, *U* en V, *I* en A).

• L'énergie électrique transférée est alors égale au produit de la puissance par la durée du transfert : $W_e = \mathcal{P}_e \cdot \Delta t = U \cdot I \cdot \Delta t$

(unités : W_e en J, $_e$ en W, Δt en s, *U* en V, *I* en A).
L'énergie électrique s'exprime en joules (unité SI) mais on utilise aussi le kilowattheure (kWh) :
1 kWh = $3{,}6 \times 10^6$ J.

À retenir

• Le courant électrique est dû à la circulation de **particules chargées** : électrons dans un métal, ions dans un électrolyte. Le **sens conventionnel** du courant correspond au sens de circulation de particules chargées positivement (de la borne + du générateur vers sa borne − pour un circuit simple en courant continu).

• L'**intensité** *I* du courant électrique est le débit de charge électrique en un point du circuit. Elle s'exprime en ampères (A).

• La **tension** U_{AB} est la différence de potentiel électrique entre deux points A et B du circuit. Elle s'exprime en volts (V).

• En **convention récepteur** les flèches de tension et d'intensité sont de sens opposés.
En **convention générateur** elles sont de même sens.

• La **puissance électrique** est donnée par la relation : $\mathcal{P}_e = U \cdot I$

• L'**énergie électrique** transférée est donnée par :

$$W_e = \mathcal{P}_e \cdot \Delta t = U \cdot I \cdot \Delta t$$

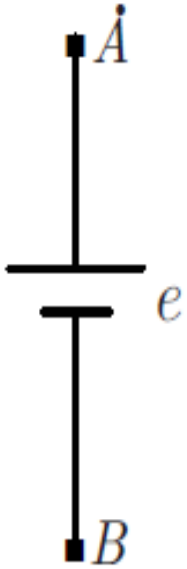
(unités : W_e en J, P_e en W, Δt en s, U en V, I en A).

5. RÔLE DU GÉNÉRATEUR : FORCE ÉLECTROMOTRICE

■ Générateur en circuit ouvert :

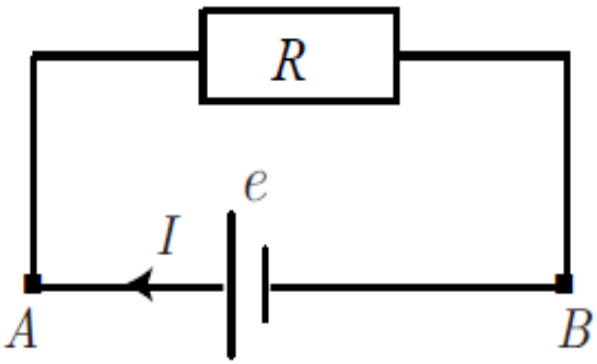
La borne au potentiel le plus élevé constitue la borne positive, et l'autre borne, la borne négative.

On a simplement : $e = V_A - V_B > 0$



5. RÔLE DU GÉNÉRATEUR : FORCE ÉLECTROMOTRICE

■ Générateur en circuit fermé :



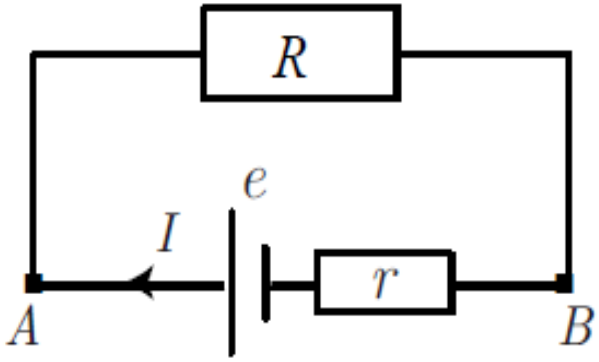
En se référant à la loi d'Ohm, on a :

$$e = V_A - V_B = RI$$

Si le générateur a une résistance r non négligeable, celle-ci prélève sur e la chute de tension (ou chute ohmique) rI avant de délivrer $V_A - V_B$ aux bornes A et B. On a donc :

$$e - rI = V_A - V_B = RI$$

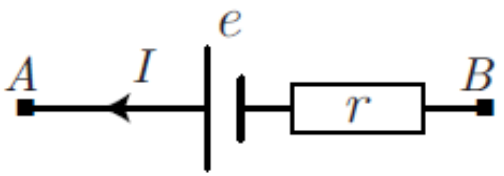
$$I = \frac{e}{R + r}$$



5. RÔLE DU GÉNÉRATEUR : FORCE ÉLECTROMOTRICE

■ Tronçon de circuit comportant un générateur

$$V_A - V_B = e - rI$$

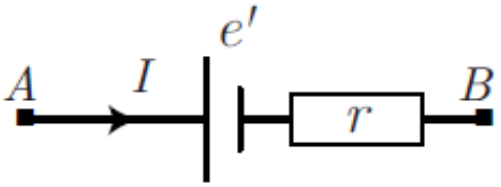


■ Cas d'un récepteur

Alors que pour un générateur, le courant sort du pôle positif et rentre par le pôle négatif, pour un récepteur, le courant suit le chemin inverse : il sort par le pôle négatif. Dans ce cas, la f.é.m. qui est toujours positive, est appelée force contre-électromotrice.

Dans un circuit complexe, comprenant des générateurs et des récepteurs, il peut arriver que le courant d'un générateur sorte par le pôle négatif. Dans ce cas, ce générateur se comporte comme un récepteur : il se charge.

■ Tronçon de circuit comportant un récepteur



$$V_A - V_B = rI + e'$$

6. LOIS DE KIRCHHOFF

Définitions générales

1) Un réseau électrique est un ensemble de générateurs, récepteurs et résistances reliées entre eux et constituant un circuit fermé.

Un nœud est un point où se rejoignent au moins trois conducteurs.

Une branche est l'ensemble des éléments situés entre deux nœuds.

Une maille est un contour fermé constitué par un certain nombre de branches.

6. LOIS DE KIRCHHOFF

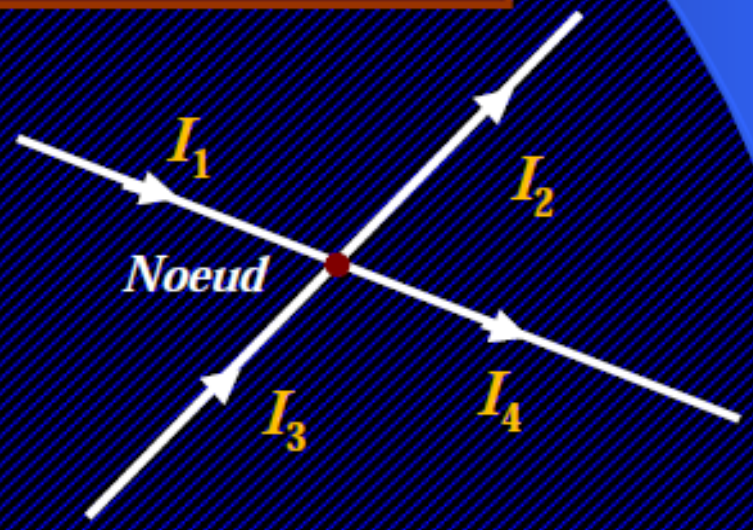
Loi des noeuds

La somme des intensités des courants qui arrivent en un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui partent de ce nœud :

$$\sum_i I_i(\text{entrants}) = \sum_j I_j(\text{sortants})$$

Exemple :

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$



6. LOIS DE KIRCHHOFF

Loi des mailles

La somme algébrique des tensions d'une maille d'un circuit est égale à zéro:

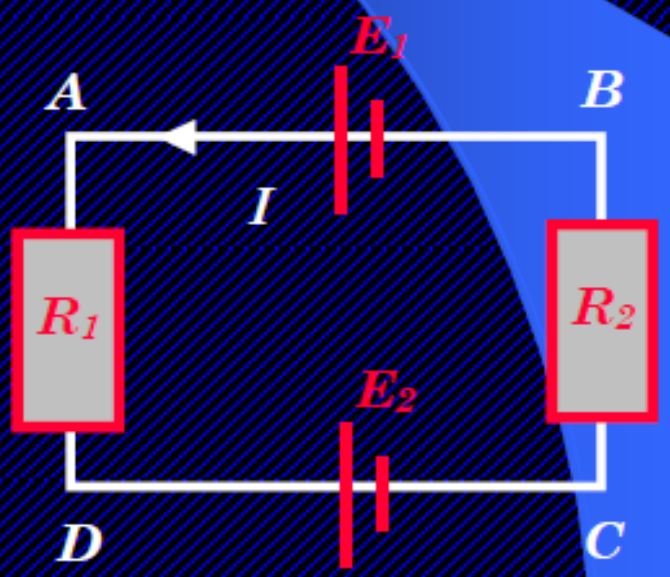
$$\sum_k U_k = 0$$

Exemple :

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = 0$$

$$E_1 - R_2 I - E_2 - R_1 I = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_1 - E_2 = (R_1 + R_2) I$$



6. LOIS DE KIRCHHOFF

Mise en équation

1) Nombre d'inconnues (les intensités)

Le réseau comporte b branches ce qui donnent b inconnues.

Il faut donc b équations.

2) Equations aux noeuds

Le réseau comporte n nœuds, on aura ($n - 1$) équations de nœuds indépendantes.

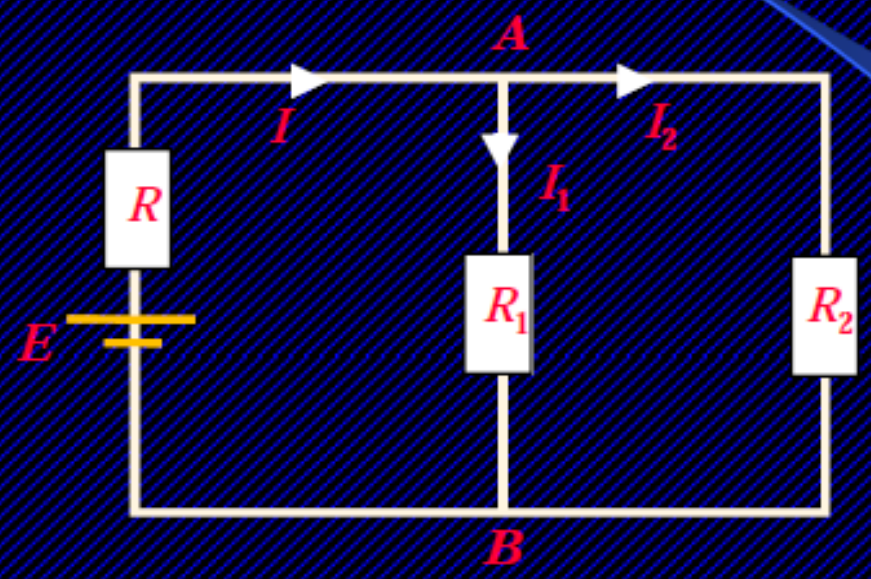
3) Equations aux mailles

Le nombre de mailles indépendantes est $m = b - (n - 1)$.

On a donc m équations de mailles indépendantes.

6. LOIS DE KIRCHHOFF

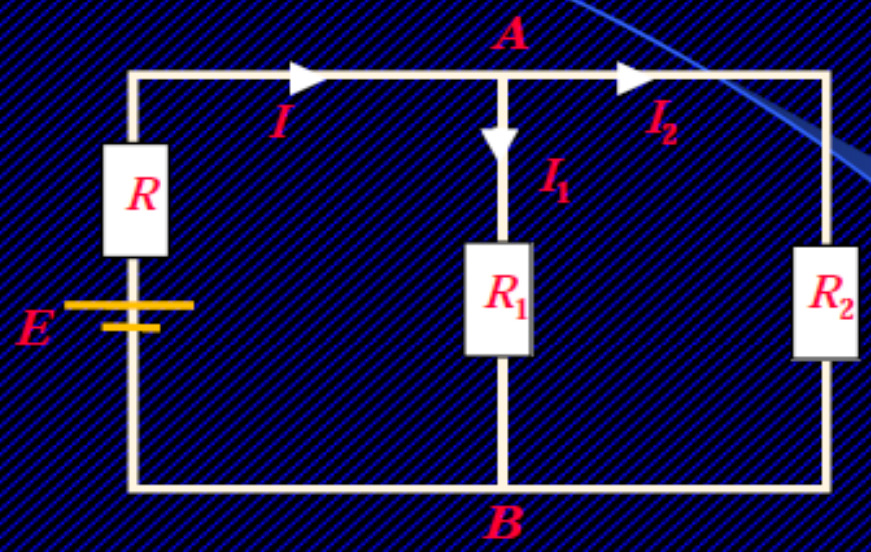
Exemple



Déterminer les courants électriques circulant dans chacune des branches de ce circuit, en utilisant les lois de Kirchhoff.

6. LOIS DE KIRCHHOFF

Exemple



1) Trois inconnues (I, I_1 , I_2), il faut donc trois équations.
2) Deux nœuds (A, B), donc une seule équation aux noeuds:

$$I = I_1 + I_2$$

3) Trois mailles, donc 2 équations aux mailles indépendantes:

Maille 1: $-E + RI + R_1I_1 = 0$

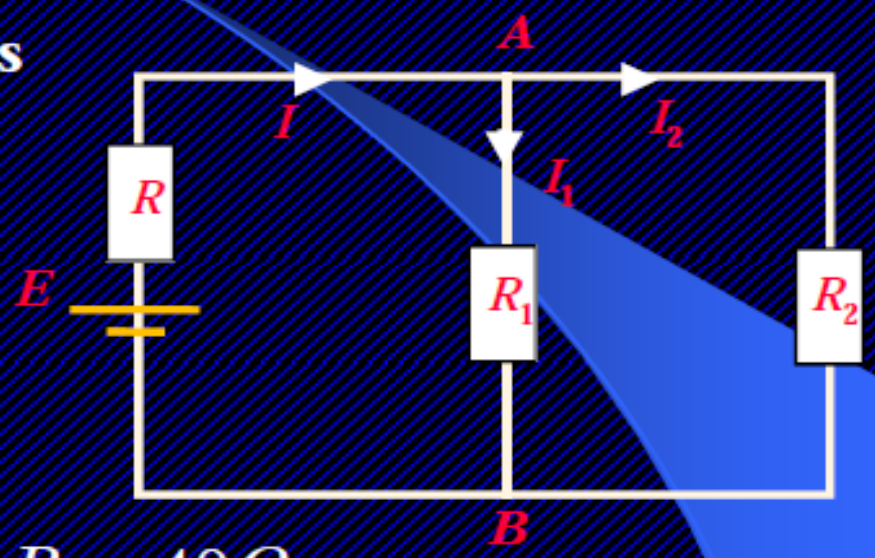
Maille 2: $-R_1I_1 + R_2I_2 = 0$

6. LOIS DE KIRCHHOFF

Exemple

On obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ RI + R_1 I_1 = E \\ -R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0 \end{cases}$$



$Si\ E = 24V, R = 4\Omega, R_1 = 10\Omega, R_2 = 40\Omega$

On obtient : $\begin{cases} I_1 = 1,6\,A \\ I_2 = 0,4\,A \\ I = 2\,A \end{cases}$

7. Théorème de Norton

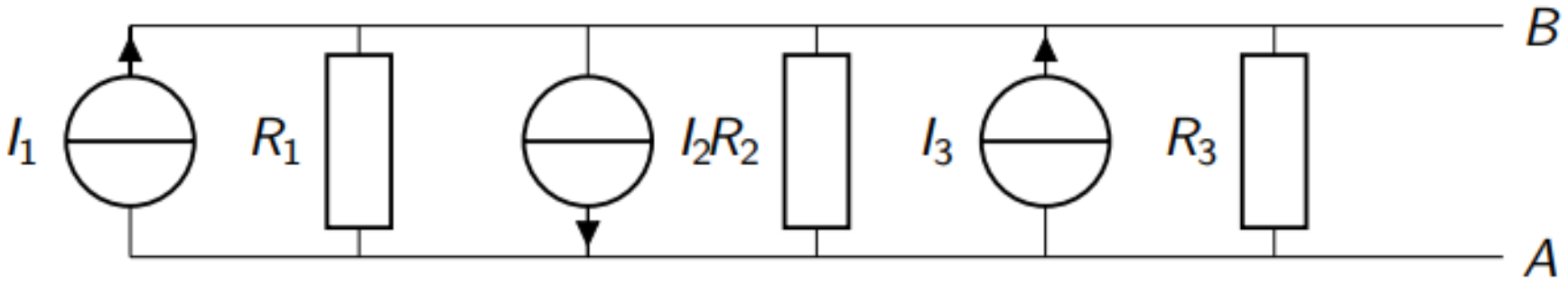
On peut remplacer tout circuit linéaire, qui alimente par les bornes A et B un dipôle D, par un générateur de courant idéal en parallèle avec une résistance R_N.

L'intensité I_N du générateur est égale au courant de court-circuit entre A et B quand le dipôle D est débranché.

La résistance R_N est égale à la résistance mesurée entre A et B quand le dipôle D est débranché et que les générateurs sont remplacés par leurs résistances internes.

7. Théorème de Norton : exemple d'application

Déterminer l'équivalent de Norton du « dipôle » AB :



1 re étape

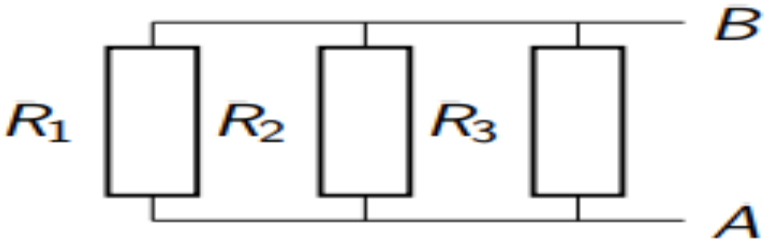
Lorsqu'on place les pôles A et B en court-circuit, la tension aux bornes du dipôle est nulle. Il n'y a donc aucun courant à travers les trois résistances du circuit. Le courant de court-circuit est donc égal à :

$$I_N = I_1 + I_2 + I_3$$

7. Théorème de Norton : exemple d'application

2 e étape

Lorsque les trois générateurs de courant idéaux sont remplacés par leurs résistances internes (qui sont infinies pour des générateurs de courant idéaux), on obtient le graphe:

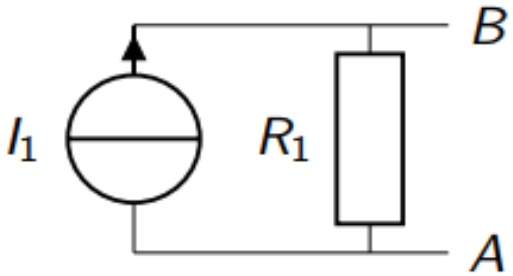


RN est équivalente aux trois résistances R1, R2 et R3, placées en parallèle :

$$\frac{1}{R_N} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}$$

Bilan

Le dipôle équivalent de Norton est donc le suivant :

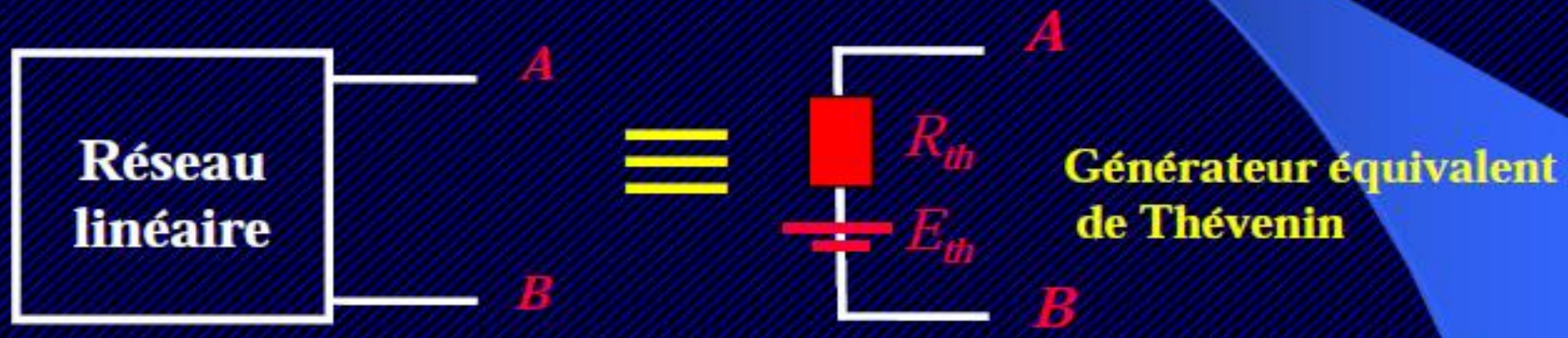


avec $I_N = I_1 + I_2 + I_3$
et $R_N = (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-1}$.

8. THEOREME DE THEVENIN

Enoncé

Tout réseau linéaire compris entre deux bornes A et B est équivalent à un générateur unique de f.e.m E_{th} en série avec une résistance R_{th}

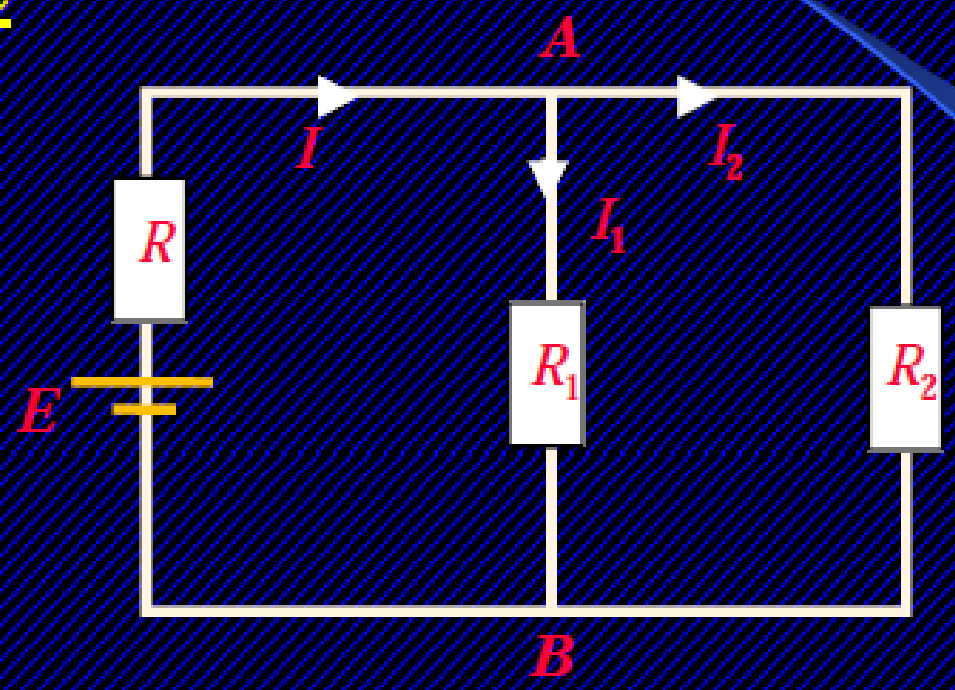


E_{th} : C'est la tension entre A et B en circuit ouvert

R_{th} : C'est la résistance entre A et B, obtenue sachant que toutes les f.e.m et les f.c.e.m sont nulles (c.à.d on éteint toutes les sources de tension)

8. THEOREME DE THEVENIN

Exemple

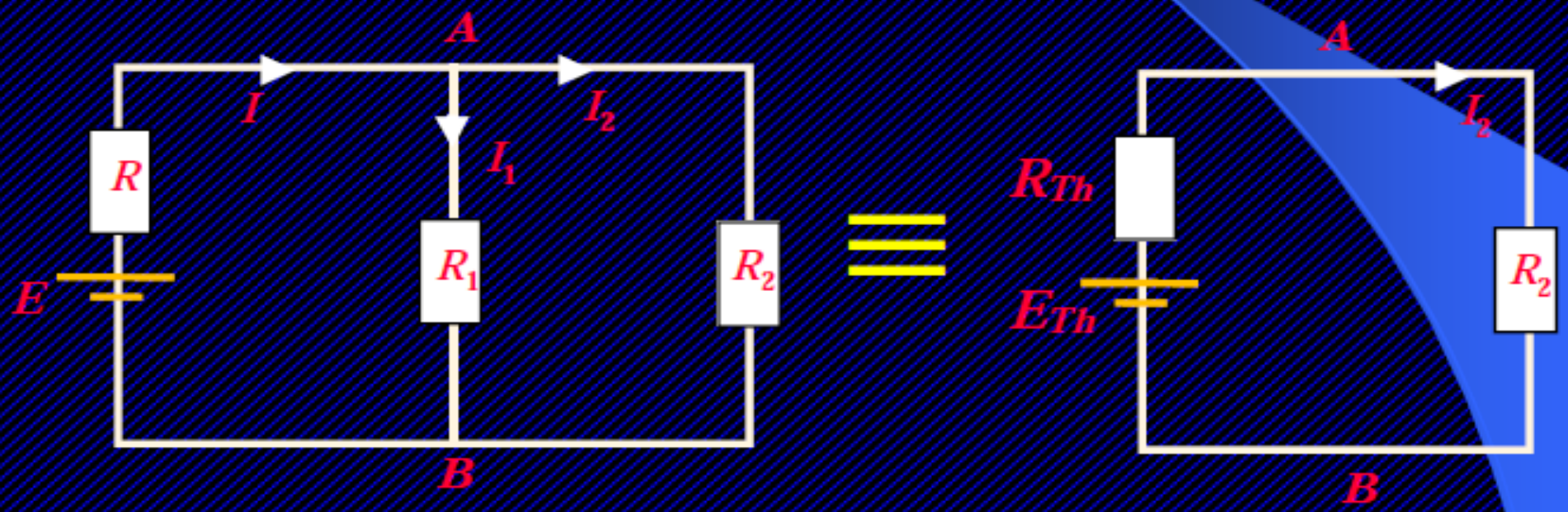


Déterminer le courant I_2 en utilisant le théorème de Thévenin.

8. THEOREME DE THEVENIN

Exemple

i) Circuit équivalent de Thévenin.

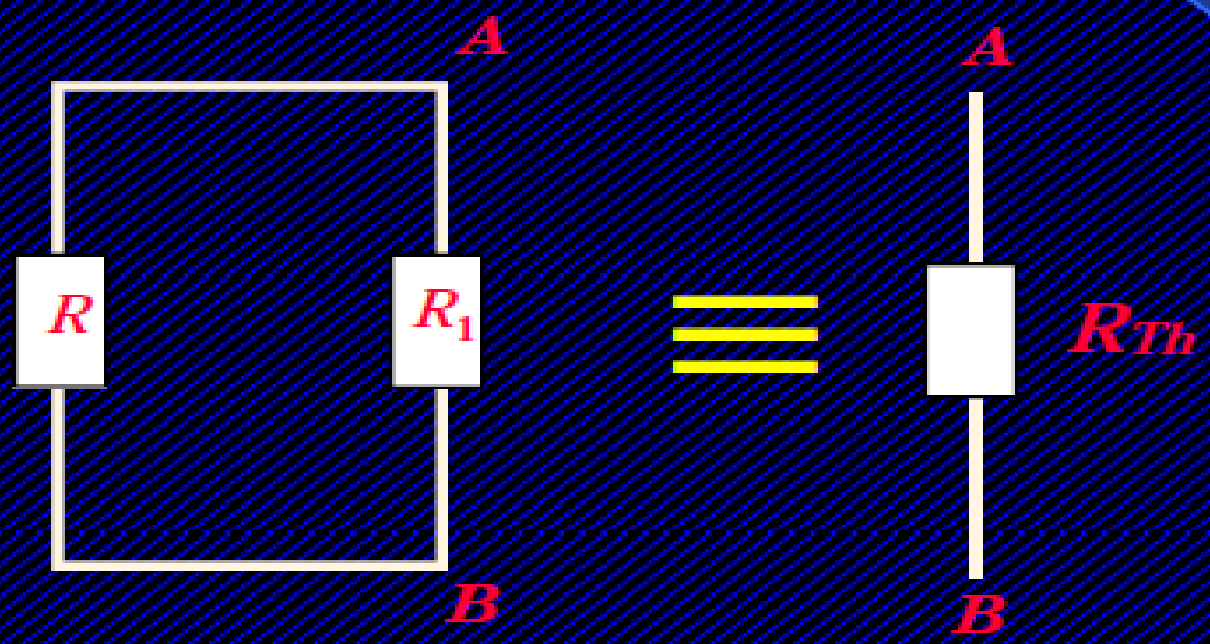


$$I_2 = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_2}$$

8. THEOREME DE THEVENIN

Exemple

ii) Calcul de la résistance de Thévenin.

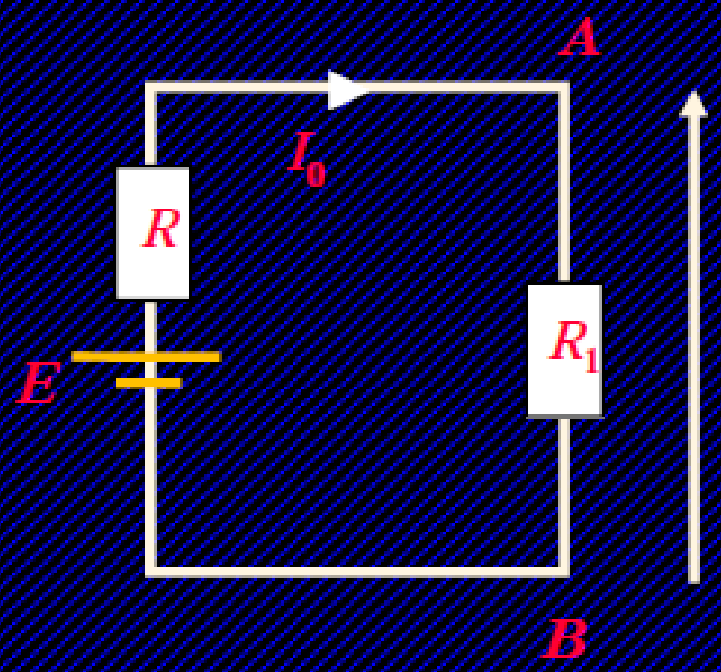


$$R_{Th} = R // R_1 \quad \Rightarrow \quad R_{Th} = \frac{RR_1}{R + R_1}$$

8. THEOREME DE THEVENIN

Exemple

iii) Calcul de la tension de Thévenin.



E_{Th} → $E_{Th} = R_1 I_0$

L'équation de la maille s'écrit:

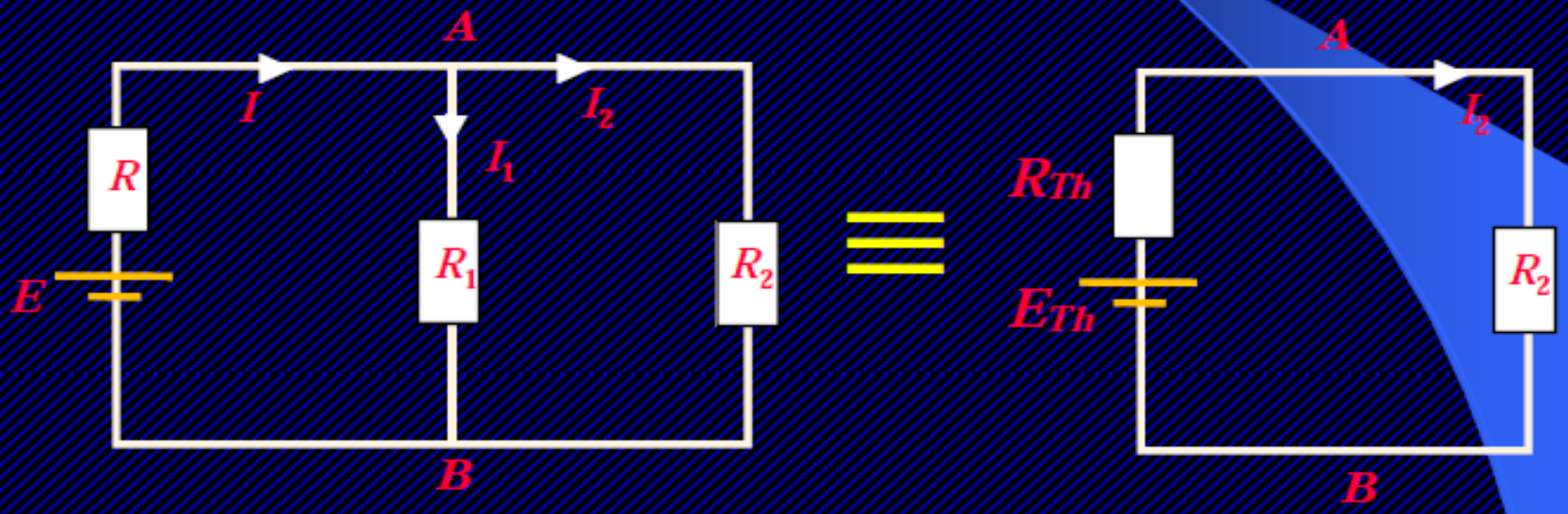
$$E = (R + R_1) I_0$$

→ $$E_{Th} = \frac{R_1 E}{R + R_1}$$

8. THEOREME DE THEVENIN

Exemple

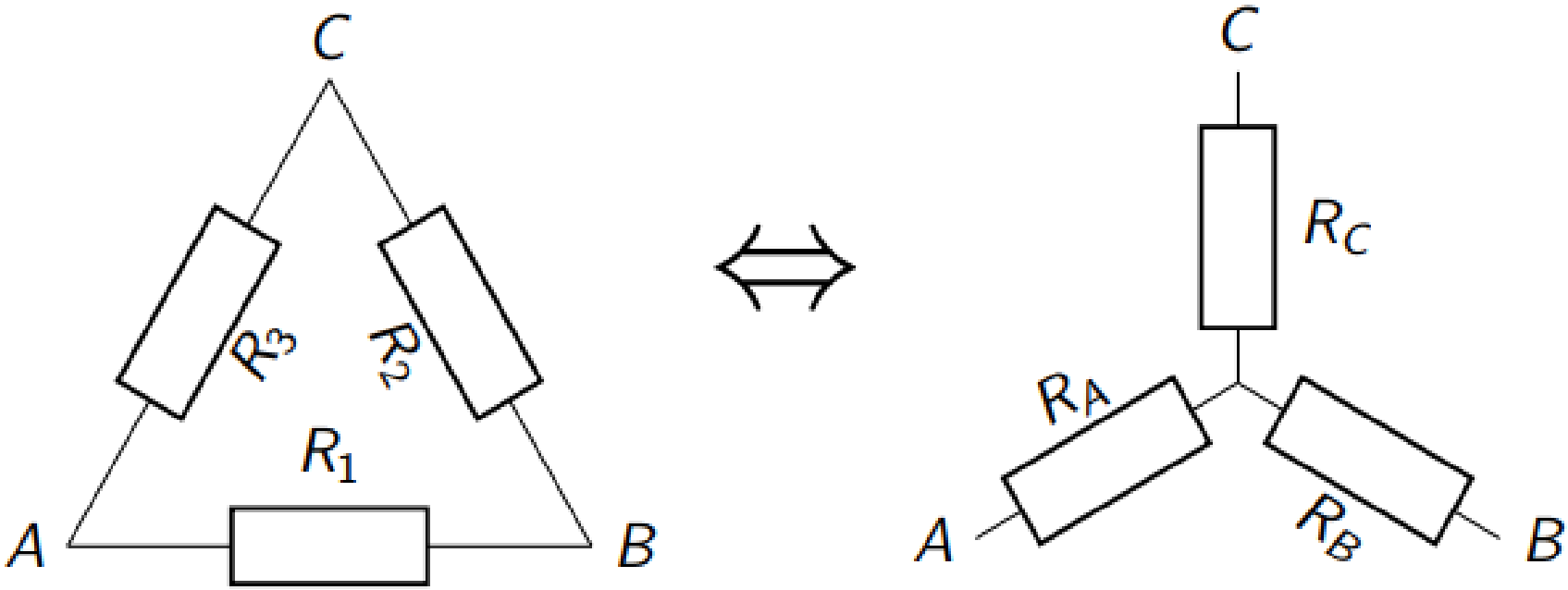
iv) Calcul du courant I_2.



$$I_2 = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_2} = \frac{R_1 E}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} = 0{,}4\ A$$

9. Théorème de Kennelly ou transformation triangle-étoile

Le théorème de KENNELLY permet d'établir une équivalence entre des résistances placées en triangle et des résistances placées en étoiles.



Théorème de Kennelly ou transformation triangle-étoile

Conversion triangle-étoile

La résistance d'une branche de l'étoile équivalente est égale au produit des résistances adjacentes divisé par la somme totale des résistances.

$$R_A = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Théorème de Kennelly ou transformation triangle-étoile

Conversion étoile-triangle

La résistance d'une branche du triangle équivalent est égale à la somme des produits des résistances, divisée par la résistance de la branche opposée :

$$R_1 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_C}$$

$$R_2 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_A}$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_B}$$

Chapitre 6:

Dipôles en régime transitoire

PLAN

1. Relation courant tension
2. Dipôle passifs linéaire en régime variable
3. Systèmes du premiers ordres
4. Systèmes du seconds ordres

Dipôle en régime transitoire

1. Relation courant tension

❒ – Résistances

La loi d'Ohm donne : $U(t) = R.I(t)$ R en *ohms* (Ω)

❒ – Inductances

De la loi de Lenz, on tire : $U(t) = L\dfrac{dI(t)}{dt}$ $I(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int U(t)dt$ L en *henrys* (H)

❒ – Condensateurs

De $dQ(t) = C.dU(t)$, on tire : $I(t) = C\dfrac{dU(t)}{dt}$ $U(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int I(t)dt$ C en *farads* (F)

Dipôle en régime transitoire

2. Dipôle passifs linéaire en régime variable

Soit un circuit constitué de dipôles passifs linéaires soumis à une tension de commande V(t) et la variable y(t) dont la nature (intensité, charge…) est fonction du problème considéré. On peut écrire, pour ce circuit, une équation différentielle dont tous les coefficients a_i sont constants et dont la forme générale est :

$$a_0.y + a_1.y' + a_2.y'' + ... + a_n.y^{(n)} = k.V(t)$$

On montre en analyse que la solution de cette équation est du type :

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$y_1(t)$ est **la** solution générale de l'équation **sans** second membre.

$y_2(t)$ est **une** solution particulière de l'équation **avec** second membre.

Dipôle en régime transitoire

2. Dipôle passifs linéaire en régime variable

Après un **régime transitoire** dont la durée est fonction des **constantes de temps** du circuit, on obtient le **régime permanent**.

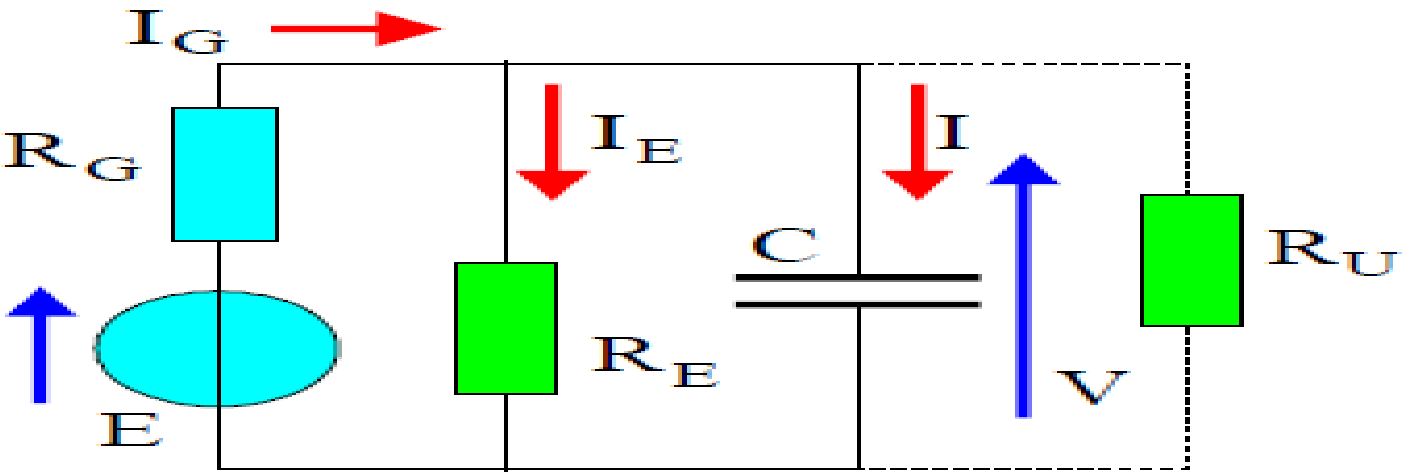
Le système est dit du premier ordre si l'équation différentielle obtenue est du premier degré, du second ordre si elle est du second degré ...

Dipôle en régime transitoire

3. Systèmes du premiers ordres

3.1 Charge et décharge d'un condensateur

➢ **CHARGE**



Méthode des mailles

$$I_G = I + I_E = I + V/R_E$$

$$I = dQ/dt = C.dV/dt$$

$$E = V + R_G.I_G = V + R_G.C.dV/dt + V.R_G/R_E$$

$$E = V.\left(\frac{R_E + R_G}{R_E}\right) + R_G.C.\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{E.R_E}{R_E + R_G} = V + \frac{R_G.R_E}{R_E + R_G} C \frac{dV}{dt}$$

Donc en posant : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_G} + \frac{1}{R_E}$, on tire : $E\frac{R}{R_G} = RC\frac{dV}{dt} + V$

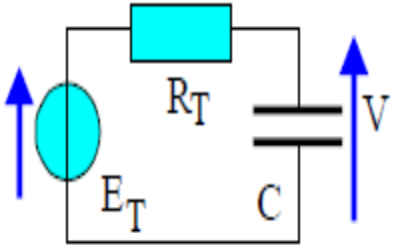
Dipôle en régime transitoire

3. Systèmes du premiers ordres

3.1 Charge et décharge d'un condensateur

➢ **CHARGE**

Méthode de Thévenin



Le générateur équivalent qui est relié au condensateur est caractérisé par :

$E_T = E.R_E/(R_E + R_G)$ $\quad R = R_T = R_E.R_G/(R_E + R_G)$

$E_T = V + R_T.I$

$$\boxed{E\frac{R}{R_G} = V + R.C\frac{dV}{dt}} \qquad (1)$$

Dipôle en régime transitoire

3. Systèmes du premiers ordres

3.1 Charge et décharge d'un condensateur

➢ **CHARGE**

❒ – La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$0 = V + R.C.dV/dt$$

$$dV/V = -1/R.C.\ dt$$

Si A désigne une constante arbitraire, la solution de cette équation (1er ordre) est :

$$V = A.\exp(-t/RC) \qquad (2)$$

Comme une quantité d'électricité est le produit d'une capacité par une tension, en utilisant les équations dites « aux dimensions » , on tire :

$$[Q] = [C].[V] = [\,I\,].[T] \qquad [C].[R].[\,I\,] = [\,I\,].[T] \qquad [R].[C] = [T]$$

RC qui a la dimension d'un temps est la « **constante de temps** » **τ** du circuit.

❒ – Solution particulière de l'équation avec second membre :

Si V est constant alors dV/dt = 0.

$V = E.R/R_G$ est donc une solution. Elle correspond au **régime permanent** : la charge du condensateur est alors terminée.

❒ – Solution complète de l'équation différentielle : $V(t) = A\exp(-t/RC) + E.R/R_G$ (3)

Dipôle en régime transitoire

3. Systèmes du premiers ordres

3.1 Charge et décharge d'un condensateur

➢ **CHARGE**

❒ – Solution physique de l'équation différentielle :

Pour obtenir la solution du problème physique, il faut préciser les **conditions initiales** de celui-ci. Si l'on suppose le condensateur totalement déchargé lors de la mise sous tension du montage : en $t = 0$, on a alors $V = 0$.

La valeur de la constante A est donc : $A = -E.R/R_G$. On en déduit :

$$V = \frac{E.R}{R_G}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad (4)$$

La durée nécessaire à la charge totale est donc infinie. En pratique, cherchons au bout de combien de temps la charge atteint sa valeur finale à un millième près :
si $(V\infty - V)/V\infty = 10^{-3}$ alors : $\exp(-t/RC) = 1/1000$.

$$t/RC = \text{Ln } 1000 \qquad t \approx 6{,}9.RC$$

Au bout de $t \approx 7.\tau$, la charge ne diffère de la charge finale que de 0,001. On peut considérer la charge du condensateur terminée.

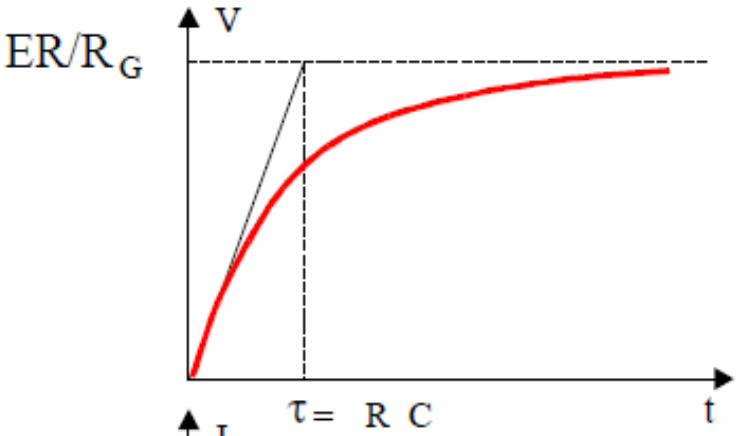
Dipôle en régime transitoire

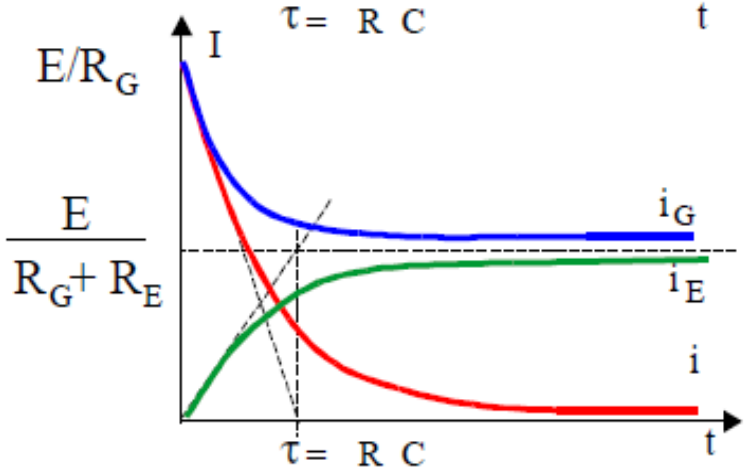
3. Systèmes du premiers ordres

3.1 Charge et décharge d'un condensateur

➢ **CHARGE**

Graphes de la tension V et des divers courants :





$$I_E = V/R_E$$

$$I_E = \frac{E.R}{R_E.R_G}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{E}{R_E + R_G}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$I = C\frac{dV}{dt} = \frac{E.}{R_G}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E.R}{R_E.R_G}\left(\frac{R_E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$I_G = I + I_E = \frac{E.R}{R_E.R_G}\left(1 + \frac{R_E}{R_G}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Bien noter sur ces graphiques les valeurs limites des tensions et courants et les valeurs des pentes des tangentes à l'origine.

Un condensateur déchargé se comporte au début de la charge comme un court-circuit pour l'alimentation. Seule la résistance R_G limite alors la valeur du courant..

Dipôle en régime transitoire

3. Systèmes du premiers ordres

3.1 Charge et décharge d'un condensateur

➢ **DECHARGE**

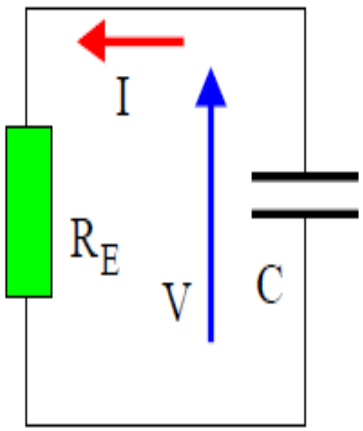


Fig. 3

Le condensateur est isolé du générateur et se décharge dans sa résistance de fuite R_F et dans la résistance de charge R_U. On pose $R_E = R_U // R_F$

$R_E.I - V = 0$

$I = -dQ/dt$ (Le condensateur se décharge : dQ est négatif !)

$V = -R_E C.dV/dt \quad \Rightarrow \quad V = A.\exp(-t/R_E C)$

En $t = 0$, on a : $V = V_0$

La solution de l'équation est donc :

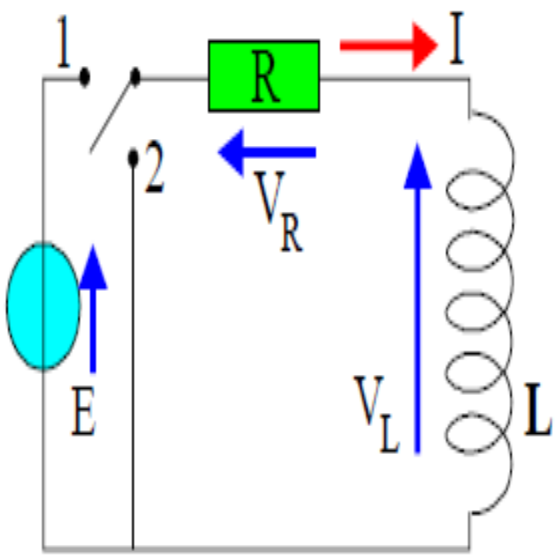
$$\boxed{V = V_0.\exp(-t/R_E C)}$$

Dipôle en régime transitoire

3. Systèmes du premiers ordres

3.2 Etablissement du courant dans une inductance

a. Régime libre



Selon la position de l'inverseur, on aura soit le régime libre (position 2) soit le régime forcé (position 1). on a :

$$E = V_R + V_L$$

$$\text{Soit : } E = R.I + L\frac{dI}{dt}$$

Dipôle en régime transitoire

3. Systèmes du premiers ordres

3.2 Etablissement du courant dans une inductance

a. Régime libre (E 0)

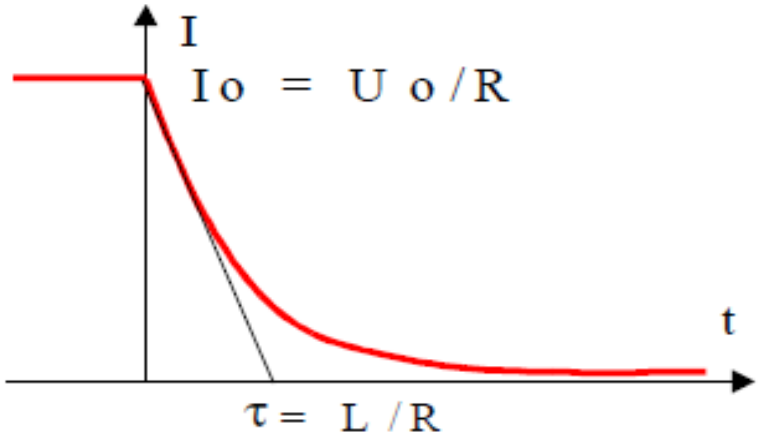
On obtient dans ce cas : $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{I} = -\frac{dt}{\tau} \quad \text{avec} : \tau = \frac{L}{R}$

Exercice : Montrer que la constante τ a la dimension d'un temps.

La solution du régime libre est : $I(t) = A.\exp(-t/\tau)$

La condition initiale est : $I_{(t=0)} = I(0) = U_0/R$. Donc :

$$I(t) = I_0.e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{et} \quad V_L(t) = L\frac{dI}{dt} = -\frac{L.I_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = -RI_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$$



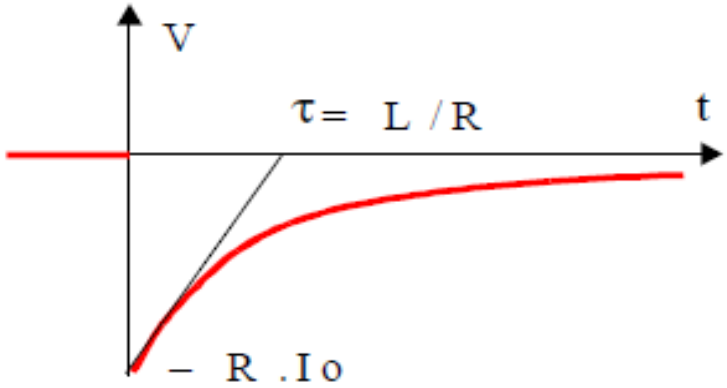


Fig. 5

Bien noter que si la fonction I(t) est continue, la fonction $V_L(t)$ est discontinue.

Dipôle en régime transitoire

3. Systèmes du premiers ordres

3.2 Etablissement du courant dans une inductance

b. Régime force

REGIME FORCE ($E \neq 0$)

Si $I_{(t=0)} = 0$, on obtient (inverseur en position 1) :

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{et} \quad V_L = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Le courant dans le circuit tend vers E/R ; la tension aux bornes de l'inductance tend vers zéro.

3.3 – Particularités des systèmes du premier ordre

Ces systèmes satisfont à une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants de la forme :

$$\frac{dG(t)}{dt} + \frac{G(t)}{\tau} = H$$

Pour le régime libre, H est nul et en régime forcé continu H est constant.
La solution est de la forme :

$$G(t) = G(0).e^{-\frac{t}{\tau}} + H.\tau$$

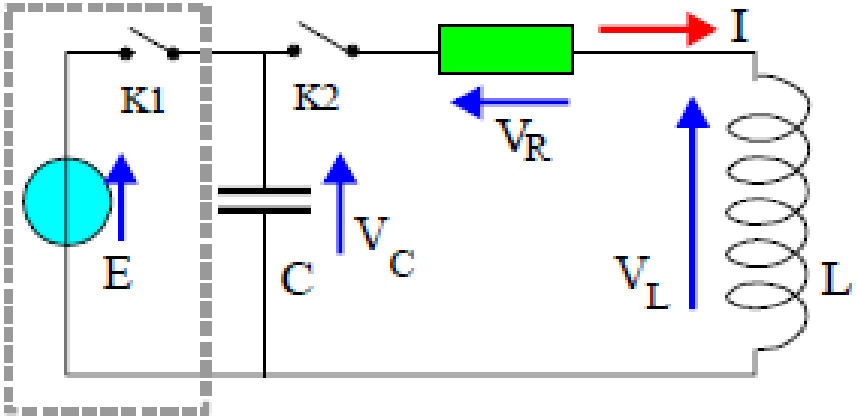
Cette solution dépend d'**une** constante **G(0)** fonction des *conditions initiales* et d'**un** paramètre **τ** (*la constante de temps*), caractéristique du circuit.

Dipôle en régime transitoire

4. Systèmes du second ordre

4.1 Le circuit R, L, C série

Le condensateur C du circuit R, L, C suivant est chargé par un générateur auxili
ensuite déconnecté par K1.



La charge initiale du condensateur est :

$$q_0 = C.E$$

Si K2 est fermé et K1 ouvert, on a :

$$-V_C + V_L + V_R = 0$$

On obtient l'équation :

$$-\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} + R.I = 0 \Leftrightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + R.\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

On pose :

$$LC\omega_0^2 = 1\,; \quad \lambda = \frac{R}{2L}\,; \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda$$

Q est le facteur de qualité et λ le facteur d'amortissement.

Dipôle en régime transitoire

4. Systèmes du second ordre

4.1 Le circuit R, L, C série

L'équation devient :

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}.\frac{dq}{dt}+\omega_0^2.q=0$$

En cherchant des solutions de la forme $q(t)=A.e^{rt}$, on obtient l'équation dite « *équation caractéristique* » suivante :

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}.r+\omega_0^2=0$$

Ses racines sont :

$$r_{1,2}=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\alpha}=-\lambda\pm\sqrt{\alpha}$$

La solution générale de l'équation est de la forme :

$$q(t)=A_1.e^{r_1t}+A_2.e^{r_2t}=e^{-\lambda t}.(A_1.e^{\sqrt{\alpha}.t}+A_2.e^{-\sqrt{\alpha}.t})$$

La *constante de temps* est ici : $\tau=1/\lambda=2L/R$. Il faut connaître **deux** conditions initiales.

Selon le signe de α, la nature des solutions diffère.

Dipôle en régime transitoire

4. Systèmes du second ordre

4.1 Le circuit R, L, C série

❒ $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$ ($Q < ½$ ou $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$) (*amortissement fort*)

Les deux racines sont réelles. On pose :

$$\Omega = \sqrt{\alpha} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$$

Les conditions initiales sont $q(t = 0) = q_0$ et $I(t = 0) = 0$

$$q_0 = A_1 + A_2 0 = r_1.A_1 + r_2.A_2 \quad \Leftrightarrow \quad (-\lambda+\Omega).A_1 = (\lambda+\Omega).A_2$$

On tire :

$$q(t) = \frac{q_0}{2\Omega}e^{-\lambda t}\left[(\lambda+\Omega).e^{\Omega t} + (-\lambda+\Omega).e^{-\Omega t}\right]$$

Dipôle en régime transitoire

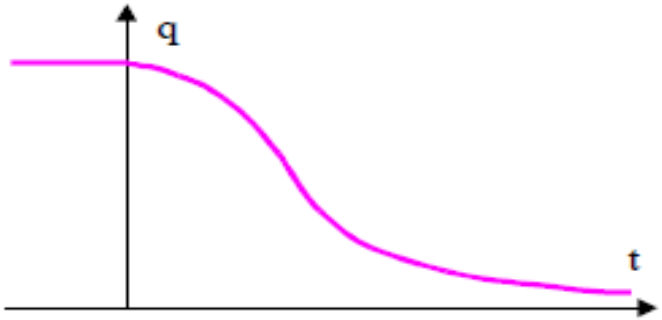
4. Systèmes du second ordre

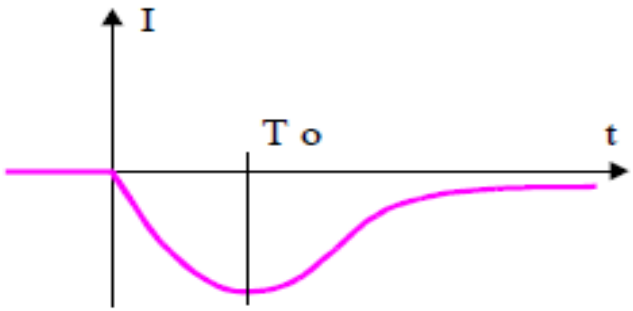
4.1 Le circuit R, L, C série

Comme $\Omega^2 - \lambda^2 = \alpha - \lambda^2 = -\omega_0^2$, on obtient :

$$I(t) = -q_0 \frac{\omega_0^2}{2\Omega} e^{-\lambda t}\left[e^{\Omega t} - e^{-\Omega t}\right]$$

Ce régime de fonctionnement est le régime **apériodique**. Le système revient à son état d'équilibre ($q = 0$, $i = 0$) sans oscillations.





Dipôle en régime transitoire

4. Systèmes du second ordre

❒ $\alpha = 0$ ($Q = ½$) (*amortissement critique*)

Il y a une racine double $r = -\lambda$

La solution générale est de la forme :

$$q(t) = (A_1 . + t . A_2) . e^{r\,t}$$

Avec les conditions initiales précédentes, on obtient :

$$q(t) = q_0 (1 + \lambda t) . e^{-\lambda t} \qquad I(t) = -q_0 . \lambda^2 t . e^{-\lambda t}$$

Le régime de fonctionnement est **apériodique** et **critique**. C'est un régime limite qui est obtenu en diminuant la valeur de R jusqu'à la valeur $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

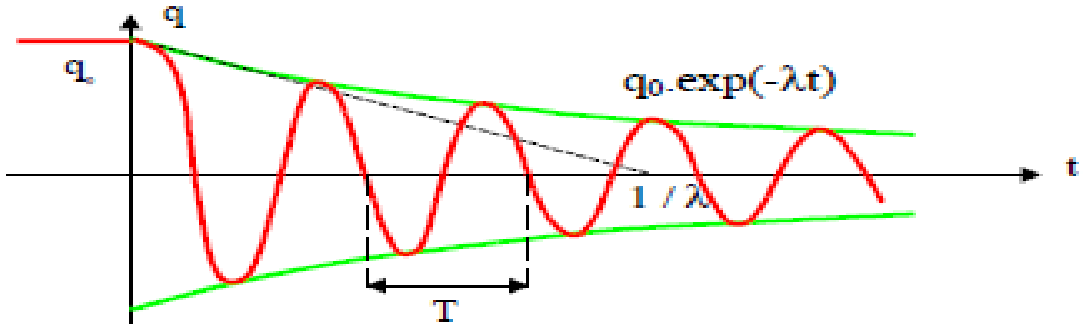
❒ $\alpha < 0$ ($Q > ½$ ou $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$) (*amortissement faible*)

On pose $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$. Les deux racines sont imaginaires conjuguées et valent :

$$r_{1,2} = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm j\omega$$

Toujours avec les mêmes conditions initiales ($q_{(t=0)} = q_0$, $i_{(t=0)} = 0$), on obtient :

$$q(t) = q_0 \frac{e^{-\lambda t}}{2j\omega}[(\lambda + j\omega).e^{j\omega t} + (-\lambda + j\omega).e^{-j\omega t}]$$



Dipôle en régime transitoire

4. Systèmes du second ordre

4.3 Particularités des systèmes du second ordre

Ces systèmes satisfont à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants de la forme :

$$\frac{d^2G(t)}{dt^2} + 2\lambda\frac{dG(t)}{dt} + \omega_0^2.G(t) = H$$

Pour le régime libre H est nul et en régime forcé continu, H est constant.

> Cette solution dépend de **deux** *conditions initiales* et de **deux** paramètres λ et ω_0 caractéristiques du circuit.

Selon les valeurs relatives de ω_0 et de λ, on obtient différents régimes de fonctionnement :

– Régime apériodique si l'amortissement est fort.

– Régime critique pour une valeur limite de l'amortissement.

– Régime pseudopériodique si l'amortissement est faible.

– Régime périodique si l'amortissement est nul.

MERCI DE VOTRE ATTENTION